

A ideia de que a demanda de especiarias resultava da necessidade de disfarçar o gosto da carne e do peixe putrefatos é um dos grandes mitos da história da alimentação. Na Europa medieval, os alimentos frescos eram mais frescos que os atuais, pois provinham da produção local. Os alimentos em conserva mantinham-se em salga, curtição, dessecação ou gordura, assim como hoje em dia são enlatados, refrigerados, liofilizados ou embalados a vácuo. De qualquer forma, os aspectos determinantes do papel desempenhado pelas especiarias na gastronomia eram o gosto e a cultura. A cozinha muito temperada com especiarias era objeto de desejo por ser cara e por “condimentar” a posição social dos ricos e as aspirações de quem ambicionava sê-lo. Além disso, a moda gastronômica predominante na baixa Idade Média europeia imitava as receitas árabes, que exigiam sabores doces e ingredientes fragrantes: leite de amêndoa, extratos de flores aromáticas e outras iguarias orientais.

(Adaptado de Felipe Armesto-Fernández, *1492: o ano em que o mundo começou*. São Paulo: Companhia das Letras, 2017, p.27).

A partir do texto acima e de seus conhecimentos históricos:

- a) defina o que são as especiarias e explique seu significado social na Europa medieval.
- b) explique como era feito o comércio de especiarias na baixa Idade Média.

#### **Resolução**

- a) **Especiarias eram produtos de origem vegetal procedentes das Índias e utilizados como temperos, remédios, conservantes, afrodisíacos e eventualmente como essências odoríferas. Na Europa Medieval, pelo alto preço que alcançavam, constituíam símbolo de status na sociedade da época.**
- b) **As especiarias produzidas nas Índias chegavam à Europa por dois itinerários: o primeiro, conhecido como “Rota da Seda”, ligava a China a Constantinopla, no Mediterrâneo, através da Ásia Central; já o segundo era marítimo, sendo percorrido por mercadores árabes, que navegavam pelo Oceano Índico levando as especiarias das Índias para o Mar Vermelho e, a seguir, para o porto egípcio de Alexandria, no Mediterrâneo.**

Ao estudar a condição feminina no Brasil colonial não se pode ter a ingenuidade de crer numa solidariedade de gênero, acima de diferenças de raça, credo e segmento econômico.

(Adaptado de Mary del Priore, A mulher na história da colônia, em *Ao sul do corpo: condição feminina, maternidade e mentalidades no Brasil colônia*. Rio de Janeiro: José Olympio, 1993).

- a) Considerando como era a mentalidade portuguesa no período mencionado, cite e explique uma função da mulher branca no processo de colonização.
- b) Explique dois papéis sociais desempenhados pelas mulheres escravizadas de origem africana no contexto do Brasil colonial.

### **Resolução**

- a) **No processo de colonização portuguesa no Brasil, a mulher branca contribuía para preservar a etnia dominante por meio da procriação, para transmitir à prole os conceitos e valores presentes na sociedade escravista e, quando viúva ou herdeira, para administrar os bens da família.**
- b) **Além de integrar a força de trabalho empregada na lavoura colonial, as escravas negras podiam ser inseridas no âmbito doméstico de seus senhores, fosse como ajudantes da esposa do fazendeiro (mucamas), fosse como amas de leite (mães-pretas) dos filhos do senhor ou ainda como amantes do proprietário, gerando uma prole de bastardos que muitas vezes atuavam como auxiliares da sociedade escravista.**

O orientalismo é um estilo de pensamento baseado em uma distinção entre Oriente e Ocidente. Quando o orientalista culto viajava para o país de sua especialização, ia sempre acompanhado de máximas inabaláveis sobre a “civilização” que estudara; eram raros os orientalistas que tinham outro interesse que não o de provar poeirentas “verdades”, aplicando-as aos nativos que não os entendiam e, portanto, eram degenerados. O Oriente precisava primeiro ser conhecido, depois invadido e possuído, e então recriado por estudiosos.

(Adaptado de Edward Said, *Orientalismo*. São Paulo: Companhia das Letras, 1990).



(Dança no Harém, Giulio Rosati. Disponível em: [www.ancient-origins.net/history-ancient-traditions/imperial-harem-ottoman-empire-more-just-beautiful-women-007835](http://www.ancient-origins.net/history-ancient-traditions/imperial-harem-ottoman-empire-more-just-beautiful-women-007835). Acessado em 10/09/2017.)

Considerando o texto e o quadro acima reproduzido e seus conhecimentos, responda às questões:

- Segundo Edward Said, o que era o orientalismo?
- Identifique um elemento do Orientalismo no quadro do pintor italiano Giulio Rosati (1858-1917) e explique esse elemento.

#### Resolução

- Conjunto de conceitos e atitudes adotados por intelectuais do Ocidente em relação aos povos orientais (asiáticos e norte-africanos), dentro de uma visão etnocentrista europeia.**
- Levando em consideração a extração ocidental do artista, o quadro destaca o exotismo e a sensualidade da vida no harém, uma instituição muçulmana estranha ao Ocidente.**

No dia seguinte ao decreto da Libertação, negros e negras deixaram apressadamente os lugares onde tinham vivido durante longo tempo nas humilhações da escravidão e, das fazendas e sítios, afluíram em direção às cidades próximas. A maior parte desses novos cidadãos livres tinha pequenas economias. Ora, seu primeiro ato foi correr às lojas de calçados.

(Adaptado de Louis Albert Gaffre, *Visions du Brésil*.

Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1912, p. 205.

Disponível em: <https://archive.org/details/visionsdubrsil00gaff>.

Acessado em 01/08/2017.)

- a) Considerando o depoimento citado, explique um significado social do uso do sapato na época.
- b) Nomeie duas estratégias de sobrevivência dos brancos pobres, mestiços e forros no período do pós-abolição.

#### **Resolução**

- a) **No escravismo brasileiro, o uso de sapatos era vedado aos escravos, embora as pessoas livres pobres também andassem descalças. Isso explica a ansiedade dos cativos recém-emancipados em adquirir calçados, tidos como símbolos de sua libertação.**
- b) **Realização de trabalhos eventuais como meios de subsistência e habitação em moradias precárias, ora no centro das cidades maiores (cortiços), ora em subúrbios distantes ou em morros favelizados.**

A campanha nazista contra a arte moderna começa com a tomada de poder. Em 1933, Hitler fecha a Bauhaus e promove a primeira exposição difamatória da arte moderna em Karlsruhe e Mannheim. Segue-se a cassação de diversos curadores, diretores de museus e artistas-professores. Os artistas começam a emigrar. Livros são queimados em praça pública e inicia-se um verdadeiro processo de expropriação arbitrária pelos nazistas dos acervos dos museus: mais de 16.500 obras de arte consideradas degeneradas são confiscadas, muitas das quais foram destruídas ou perdidas. Obras de valor - como *Auto-Retrato*, de Vincent van Gogh ou *Acrobata e Jovem Arlequim*, de Pablo Picasso - são vendidas em um leilão em 1939 na Galeria Fischer, na Suíça, e revertidas em divisas para os nazistas.

(Adaptado do verbete “Arte Degenerada” da *Enciclopédia Itaú Cultural* disponível em

<http://enciclopedia.itaucultural.org.br/termo328/artes-degenerada>.

Acessado em 31 de agosto de 2017).

- a) A partir do texto acima e de seus conhecimentos, explique o que foi o projeto estético do nazismo.
- b) Indique duas formas da violência perpetrada pelo regime nazista.

### Resolução

- a) **O projeto estético do nazismo, derivado da visão artística conservadora do próprio Hitler, empenhou-se no combate ao modernismo, tido como “arte degenerada”, e na promoção de um modelo baseado em padrões neoclássicos.**
- b) **Imposição de uma estrutura político-social totalitária, com cerceamento das liberdades políticas, civis e intelectuais, e tentativa de destruir determinadas comunidades étnicas, como judeus e ciganos.**

No Brasil pós-ditadura, a disputa pela memória foi marcada pela publicação do projeto *Brasil: Nunca Mais* (BNM), em 1985. Pode-se dizer que se trata de um ato fundacional na construção da memória social sobre os crimes da ditadura, o qual favoreceu a constituição de uma consciência coletiva acerca da política repressiva do período e do status dos sobreviventes.

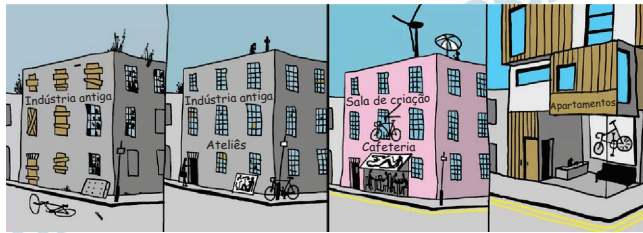
(Adaptado de Janaina de Almeida Teles,

A constituição das memórias sobre a repressão da ditadura: o projeto *Brasil: Nunca Mais* e a abertura da vala de Perus. *Anos 90*, Porto Alegre, v. 19, n. 35, p. 265, jul. 2012).

- a) Explique dois objetivos do projeto *Brasil: Nunca Mais*.
- b) Por quais razões a autora considera o projeto *Brasil: Nunca Mais* um ato fundacional?

#### **Resolução**

- a) **Manter viva a memória das violações dos direitos humanos cometidas pela ditadura militar, para que episódios semelhantes jamais voltem a ser praticados no País.**
- b) **Para a autora, o projeto *Brasil: Nunca Mais* constitui um “ato fundacional” (isto é, básico, angular, fundamental), porque, por meio dele, procura-se criar uma consciência coletiva que, baseada na perpetuação da memória social, impeça a repetição dos crimes praticados pela ditadura militar.**



(Adaptado de <http://www.courb.org/>.

Acessado em 14/09/2017.)

A tira acima retrata a transformação de uma paisagem urbana associada aos processos de refuncionalização espacial e gentrificação (do inglês *gentrification*).

- Dê dois exemplos de refuncionalização espacial ilustrados na tira acima.
- O que é gentrificação? A partir de qual momento da urbanização mundial esse fenômeno passa a ocorrer?

### Resolução

- Como exemplos de refuncionalização observados na figura, surgem, primeiro, a mudança de função da atividade industrial (em processo de decadência) para a de escritórios prestadores de serviços (no caso, um ateliê de criação), para, num segundo momento, a mesma construção passar a ser um edifício de apartamentos de alta renda (função habitacional).
- Por gentrificação (palavra de origem inglesa-francesa), entende-se um processo de revalorização de antigas áreas urbanas que mudam suas funções e prejudicam principalmente as populações mais pobres, impossibilitadas de arcar com os custos de manutenção e que acabam por ser expulsas da área. O processo de gentrificação começa a ocorrer a partir da industrialização iniciada na Europa no século XIX e, em tempos atuais, foi intensificado com o advento da globalização, observado primeiramente em bairros de cidades europeias e norte-americanas, mas passível de também ocorrer em cidades brasileiras.



(Adaptado de Jeff Schmaltz/NASA/GSFCm, 2003. Acessado em 20/09/2017.)

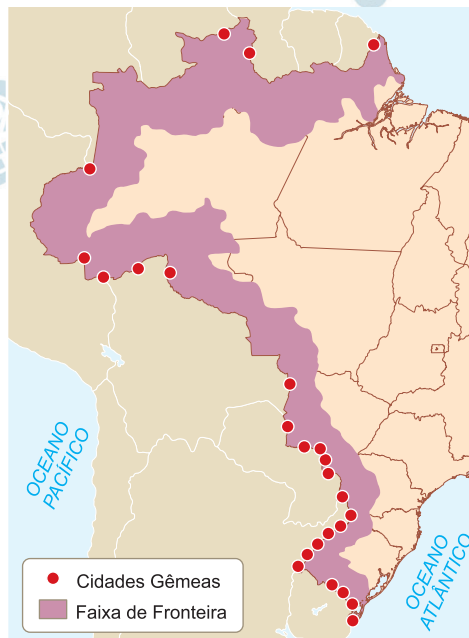
O território egípcio é marcado pela presença de dois compartimentos naturais: o Delta do Nilo e um golfo. Com base em seus conhecimentos e na imagem acima, responda às questões.

- a) O que é um delta? Indique qual é a forma de relevo típica de terreno deltaico.
- b) Indique o nome do golfo que divide o território egípcio e aponte sua importância geopolítica para o mundo contemporâneo.

#### Resolução

- a) O delta é a foz de um rio em que predomina o processo de sedimentação (a água, com menor velocidade, não tem força para empurrar os sedimentos que se depositam no fundo do vale), obstruindo a saída da água para o oceano, mar, lago ou lagoa, construindo assim, inúmeros canais. Um delta apresenta um terreno de planície, formado por várias ilhas e bancos de areia, geralmente com altas cargas de nutrientes, tornando a região bastante fértil.
- b) Trata-se do Golfo de Suez, que separa o Egito da Arábia Saudita. Ao norte desse golfo se encontra o Canal de Suez, construído no século XIX, recentemente modernizado e que liga o Mar Mediterrâneo ao Mar Vermelho. Por esse canal trafegam diversas embarcações que transportam desde passageiros aos mais diversos tipos de carga, com destaque para o petróleo. Esse canal já foi motivo de diversos conflitos envolvendo potências europeias, o Egito, seu atual dono, países do Oriente Médio e a antiga URSS. No atual processo de globalização, que também se constitui de intensos fluxos de transportes navais, o canal continua gerando interesse internacional.





(Adaptado de [cdif.blogspot.com.br](http://cdif.blogspot.com.br). Acessado em 18/10/2017.)

Com base na figura acima e em seus conhecimentos, responda às questões.

- Explique o que é limite fronteiriço e o que é a Faixa de Fronteira Brasileira.
- O que são cidades gêmeas? No território brasileiro, qual cidade gêmea é a mais importante em movimento de pessoas e de mercadorias?

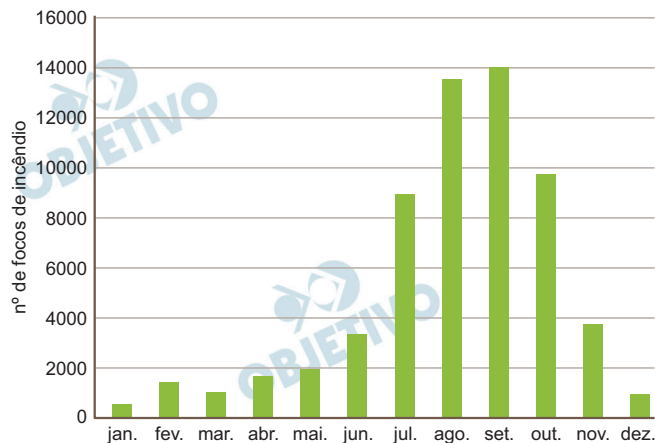
#### Resolução

- O *limite fronteiriço* corresponde a um traçado estabelecido por acordos e tratados entre dois ou mais países que podem utilizar limites naturais ou artificiais.

A *Faixa de Fronteira* engloba a faixa de 150 km a partir do limite fronteiriço ao longo de cerca de 15.000 km das fronteiras interiores.

- Cidades gêmeas são aquelas localizadas em áreas de limite internacional, como as cidades brasileiras localizadas na fronteira do Rio Grande do Sul com o Uruguai, do Mato do Grosso do Sul com o Paraguai. Apresentam normalmente processo de conurbação. A principal cidade gêmea brasileira, com intenso fluxo de pessoas e mercadorias, é *Foz do Iguaçu*, no estado do Paraná, na fronteira com Cidade do Leste no Paraguai.

## COMPARATIVO SAZONAL DO BIOMA CERRADO, 2016



(Adaptado de [www.inpe.br/queimadas](http://www.inpe.br/queimadas). Acessado em 20/10/2017.)

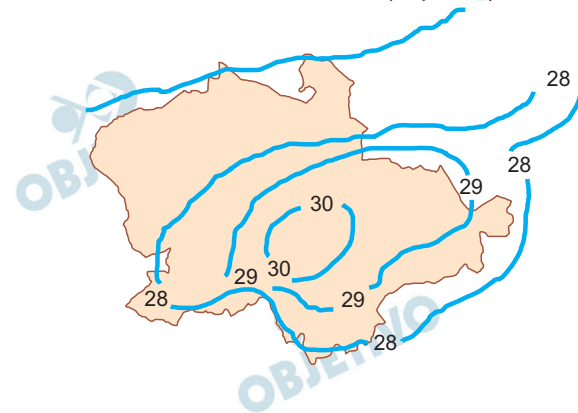
Em 2016, conforme registros do INPE, cerca de 60.000 focos de incêndios de pequenas e grandes proporções atingiram o bioma Cerrado. Embora as queimadas resultem, em sua maior parte, da ação humana, elas também ocorrem como um evento natural, comum e integrado a esse bioma.

- Aponte um fator que revela a importância das queimadas como evento natural nas áreas de Cerrado e explique sua sazonalidade.
- Qual é o principal processo que impulsiona atualmente a reorganização regional no bioma Cerrado e qual é o tipo de produção econômica que prevalece nessa área?

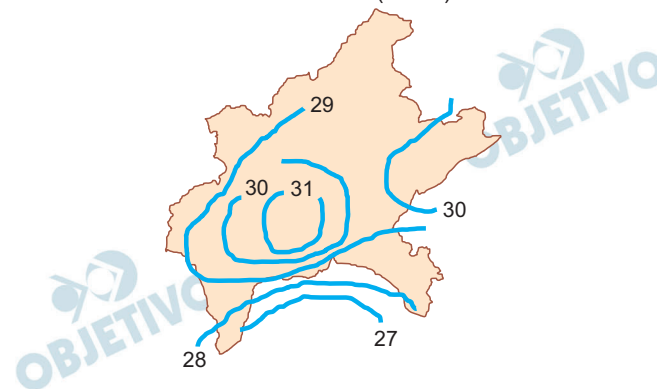
#### Resolução

- O fator que revela a importância das queimadas é que o bioma do Cerrado combina áreas com espécies arbóreas e trechos de vegetação aberta que depende da luz solar e de incêndios naturais periódicos para suas sementes germinarem. A diminuição das queimadas pode resultar em redução de quantidades de plantas e de alguns animais, como as formigas. O período de maior ocorrência de queimadas compreende os meses de estiagens mais severas, notadamente os de inverno e de início de primavera.
- O principal processo de reorganização regional é o avanço das fronteiras agrícolas para a produção de grãos com a utilização de modernas técnicas como correção do solo, mecanização e melhoria de espécies, típicas do agronegócio, como a produção de soja.

Cidade de Córdoba (Espanha)



Cidade de Goiânia (Brasil)



(Adaptado de <http://slideplayer.com.br/slide/365878/>.  
Acessado em 15/07/2016.)

As imagens acima indicam um fenômeno climático provocado pela dinâmica social. Esse fenômeno altera o tempo atmosférico nas grandes cidades do mundo todo.

- Explique o que é clima e o que é tempo atmosférico.
- Que fenômeno está representado nas isothermas indicadas acima? Esse fenômeno é sazonal ou independente da estação do ano?

#### Resolução

- Nos estudos climáticos, o *tempo* corresponde a um estado momentâneo/transitório da atmosfera, enquanto o *clima* corresponde à sucessão habitual dos estados do tempo, condição que se estende por um longo período.
- As isothermas indicadas acima representam o fenômeno das “ilhas de calor”.  
O fenômeno da “ilha de calor”, embora apresente variações na intensidade de sua ocorrência ao longo do ano, não é sazonal e independe das estações do ano, sendo produzido por interferências antrópicas como impermeabilização do solo, concentração de poluentes, remoção da cobertura vegetal e grande densidade de casas e edifícios. Tais fatores colaboram com a maior concentração de calor nas áreas centrais urbanas.

A cidade de Hamburgo, a mais rica da Europa, exibe tanto a mais alta proporção de milionários como a mais elevada incidência de beneficiários da assistência pública da Alemanha; já Nova Iorque concentra a maior quantidade de ricos do Planeta, mas também um dos maiores exércitos de pessoas sem teto e indigentes do hemisfério ocidental. Aparentemente contraditórios, esses fenômenos estão vinculados ao avanço da prosperidade econômica global – não há declínio econômico nesses países – que traz retrocesso e desarticulação do Estado de bem-estar social.

(Adaptado de Loic Wacquant, *Parias urbanos*. Marginalidad em la ciudad a comienzos del milenio. Buenos Aires: Manacial, 2015.)

- a) Por que a produção da riqueza em países desenvolvidos está gerando mais pobres? Além do conflito de classes, cite outro tipo de conflito social observado em Nova Iorque que também é condicionante para a geração de pobreza.
- b) O que é o Estado de bem-estar social? Dê um exemplo de recuo do Estado de bem-estar social.

### **Resolução**

- a) Nos países capitalistas – ricos ou pobres –, a produção visa ao lucro e não necessariamente à distribuição de riquezas. Esta geração de riqueza, especialmente em países desenvolvidos, leva ao aumento da quantidade de pobres por vários motivos: [1] porque esta parcela da população – menos qualificada, em geral – é mais facilmente substituída no processo de automação e robotização da produção; [2] pelo fato de os empregos de menor qualificação serem os mais suscetíveis à extinção com a transferência de plantas industriais para países periféricos nos quais os custos de produção são menores; e [3] os segmentos que demandam trabalho menos qualificado são mais atingidos pelo processo de terceirização da produção.

O aumento da pobreza tem também como fatores condicionantes: a segregação de imigrantes – a xenofobia, fundamentada no temor de que o elemento imigrante venha a substituir trabalhadores nacionais por oferecer seu trabalho a um custo menor e se sujeitar a condições precárias de trabalho; e questões de natureza racial, com a flagrante discriminação de elementos não brancos – de origem africana ou latino-americana –, componentes da sociedade nova-iorquina que recebem menor remuneração por seu trabalho; a gentrificação, com revitalização de áreas urbanas deterioradas que se tornam inacessíveis à população mais pobre.

b) Do inglês *Welfare State*, o Estado de bem-estar social é uma forma de organização de alguns poucos países capitalistas que visa atender às demandas sociais e reduzir as desigualdades sociais. Nesta forma de organização, o Estado regulamenta a vida e a saúde social, política e econômica do país, assegura a prestação de serviços públicos básicos e padrões mínimos de educação, saúde, habitação, renda e seguridade social a todos os cidadãos. Diferentemente da típica organização capitalista na qual o trabalho é visto como uma mercadoria, no Estado de bem-estar social passa a ser um elemento fundamental da cidadania e da inserção na sociedade.

A proteção social que esta forma de organização assegura é devida à característica interventiva e regulatória do Estado na área social por meio de programas assistencialistas.

O reco do Estado de bem-estar social tem como exemplos possíveis: as propostas de reforma no sistema previdenciário, a precarização da legislação trabalhista, políticas discriminatórias de deslocados – imigrantes e refugiados.

A tabela abaixo exibe o valor das mensalidades do Ensino Fundamental em três escolas particulares nos anos de 2017 e 2018.

ANO	Escola A	Escola B	Escola C
2017	R\$ 1.000,00	R\$ 1.200,00	R\$ 1.500,00
2018	R\$ 1.150,00	R\$ 1.320,00	R\$ 1.680,00

- a) Determine qual escola teve o maior aumento percentual nas mensalidades de 2017 para 2018.
- b) Uma família tem três filhos matriculados na **Escola B**. Suponha que essa escola ofereça um desconto de 10% na mensalidade para o segundo filho e de 20% para o terceiro filho. Calcule o valor a ser gasto mensalmente com os três filhos em 2018.

#### Resolução

a)

	2017	2018	aumento (%)
A	1000	1150	15%
B	1200	1320	10%
C	1500	1680	12%

- b) A despesa na escola B será, em reais:

$$1320 + 0,9 \cdot 1320 + 0,8 \cdot 1320 =$$

$$= (1 + 0,9 + 0,8) 1320 = 2,7 \cdot 1320 = 3564$$

Respostas: a) a escola A

b) R\$ 3564,00

Seja  $c$  um número real, considere a função afim  $f(x) = 2x + c$ , definida para todo número real  $x$ .

- a) Encontre todas as soluções da equação  $[f(x)]^3 = f(x^3)$ , para  $c = 1$ .
- b) Determine todos os valores de  $c$  para os quais a função  $g(x) = \log(xf(x) + c)$  esteja definida para todo número real  $x$ .

### Resolução

- a) Sendo  $f(x) = 2x + c$ , para  $c = 1$ , temos:

$$f(x) = 2x + 1 \text{ e } [f(x)]^3 = f(x^3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x + 1)^3 = 2 \cdot x^3 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 2x^3 + 1 \Leftrightarrow$$

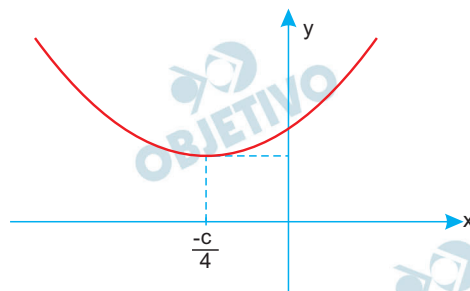
$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1 \text{ (dupla)}$$

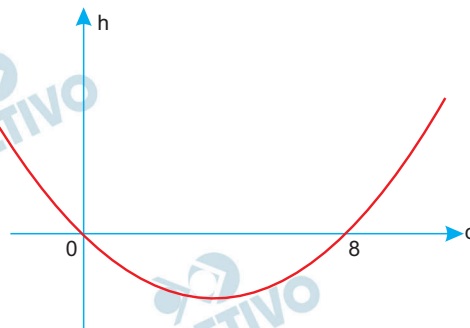
- b)  $g(x) = \log[x \cdot f(x) + c]$  só está definida para qualquer  $x \in \mathbb{R}$  se  $x \cdot f(x) + c > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Assim, } x \cdot (2x + c) + c > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + cx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow c^2 - 4 \cdot 2 \cdot c < 0, \text{ pois o gráfico da função } y = 2x^2 + cx + c \text{ deverá ser do tipo}$$



Desta forma,  $c^2 - 8c < 0 \Leftrightarrow 0 < c < 8$ , pois o gráfico de  $h(c) = c^2 - 8c$  é



Respostas: a)  $V = \{0; -1 \text{ (dupla)}\}$

b)  $\{c \in \mathbb{R} \mid 0 < c < 8\}$

Considere a sequência de números reais  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  tal que  $(a_1, a_2, a_3)$  é uma progressão geométrica e  $(a_3, a_4, a_5)$  é uma progressão aritmética, ambas com a mesma razão  $w$ .

- a) Determine a sequência no caso em que  $a_3 = 3$  e  $w = 2$ .  
b) Determine todas as sequências tais que  $a_1 = 1$  e  $a_5 = 8$ .

### Resolução

- a) Sabendo que  $a_1; a_2; a_3$  é uma P.G., temos:

$$a_3 = 3 \quad a_2 = 3/2 \quad a_1 = 3/4, \text{ pois } a_3 = 3 \text{ e } w = 2$$

$$\text{Dessa forma, temos: } a_4 = 3 + 2 = 5 \text{ e } a_5 = 3 + 4 = 7$$

pois  $a_3, a_4, a_5$  formam uma P.A.

- b) Como  $a_1, a_2, a_3$  formam uma P.G. de razão  $w$  e

$$a_1 = 1, a_3 \text{ pode ser escrito como: } a_3 = a_1 \cdot w^2 = w^2$$

Como  $a_3, a_4, a_5$  formam uma P.A. de razão  $w$  e

$a_5 = 8$ , podemos relacioná-los da seguinte forma:

$$a_5 = a_3 + 2w$$

$$8 = w^2 + 2w$$

$$w^2 + 2w - 8 = 0$$

$$w = -4 \text{ ou } w = 2$$

Para  $w = -4$ , temos:

$$(1; -4; 16; 12; 8)$$

Para  $w = 2$ , temos:

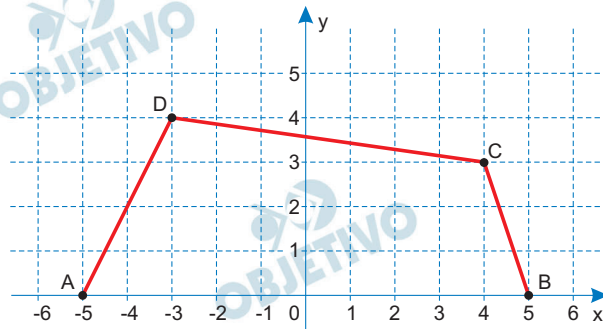
$$(1; 2; 4; 6; 8)$$

$$\text{Respostas: a) } \left( \frac{3}{4}; \frac{3}{2}; 3; 5; 7 \right)$$

$$\text{b) } (1; -4; 16; 12; 8) \text{ ou } (1; 2; 4; 6; 8)$$



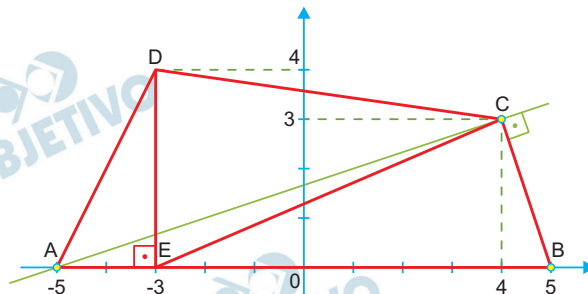
A figura abaixo exibe, no plano cartesiano, um quadrilátero com vértices situados nos pontos de coordenadas  $A = (-5,0)$ ,  $B = (5,0)$ ,  $C = (4,3)$  e  $D = (-3,4)$ .



- a) Determine a área desse quadrilátero.  
 b) Encontre a equação da reta que passa pelo ponto A e é perpendicular à reta que passa pelos pontos B e C.

### Resolução

a)



A área  $S$  do quadrilátero ABCD é igual à soma das áreas dos triângulos ADE, CDE e BCE e, portanto,

$$S = \frac{2 \cdot 4}{2} + \frac{4 \cdot (4 + 3)}{2} + \frac{(5 + 3) \cdot 3}{2} = 30$$

- b) O coeficiente angular  $m$ , da reta que passa por B (5; 0) e C (4; 3), é

$$m = \frac{0 - 3}{5 - 4} = -3$$

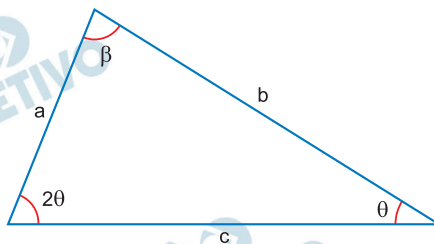
Logo, a reta que passa por A (-5; 0) e é perpendicular à reta que passa por B e C tem equação

$$y - 0 = \frac{1}{3} \cdot (x + 5) \Leftrightarrow x - 3y + 5 = 0$$

Respostas: a) 30 unidades de área

$$b) x - 3y + 5 = 0$$

A figura abaixo exibe um triângulo com lados de comprimentos  $a$ ,  $b$  e  $c$  e ângulos internos  $\theta$ ,  $2\theta$  e  $\beta$ .



- a) Supondo que o triângulo seja isósceles, determine todos os valores possíveis para o ângulo  $\theta$ .  
 b) Prove que, se  $c = 2a$ , então  $\beta = 90^\circ$ .

### Resolução

- a) Como todo triângulo isósceles é isoângulo, podemos ter:

$$\text{I) } \begin{cases} \beta = \theta \\ 2\theta + \theta + \beta = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = \theta \\ 4\theta = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 45^\circ \\ \theta = 45^\circ \end{cases}$$

$$\text{II) } \begin{cases} \beta = 2\theta \\ 2\theta + \theta + \beta = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = 2\theta \\ 5\theta = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 72^\circ \\ \theta = 36^\circ \end{cases}$$

Logo, os possíveis valores de  $\theta$  são  $36^\circ$  e  $45^\circ$ .

- b) Pela lei dos senos:

$$\frac{a}{\sin \theta} = \frac{b}{\sin 2\theta} = \frac{c}{\sin \beta}$$

Para  $c = 2a$ , resulta:

$$\frac{a}{\sin \theta} = \frac{2a}{\sin \beta} \Leftrightarrow \sin \beta = 2 \sin \theta \text{ e}$$

$$\frac{b}{\sin 2\theta} = \frac{c}{\sin \beta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{2 \sin \theta \cdot \cos \theta} = \frac{c}{2 \sin \theta} \Leftrightarrow b = c \cos \theta$$

Pela lei dos cossenos, tem-se:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 \text{ e, portanto, o triângulo é retângulo de hipotenusa medindo "c".}$$

Assim, o ângulo  $\beta = 90^\circ$ .

Respostas: a) ( $\beta = 45^\circ$  e  $\theta = 45^\circ$ ) ou ( $\beta = 72^\circ$  e  $\theta = 36^\circ$ )

b) Demonstração

Sabendo que  $p$  e  $q$  são números reais, considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & p \\ 1 & p & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

- a) Prove que para quaisquer  $p$  e  $q$  teremos  $B^T A B \geq 0$ .  
 b) Determine os valores de  $p$  e  $q$  para os quais o sistema linear nas variáveis reais  $x$ ,  $y$  e  $z$ ,  $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$ , tem infinitas soluções.

### Resolução

- a) Interpretando a frase “para quaisquer  $p$  e  $q$  teremos  $B^T A B \geq 0$ ”, como sendo “para quaisquer  $p$  e  $q$  o único elemento de  $B^T A B$  é maior ou igual a zero”, temos:

$$\begin{aligned} B^t \cdot A \cdot B &= [p \quad 0 \quad q] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & p \\ 1 & p & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ q \end{bmatrix} = \\ &= [p+q \quad pq \quad p+q] \cdot \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ q \end{bmatrix} = [(p+q)^2] \end{aligned}$$

Assim, o único elemento da matriz  $B^t \cdot A \cdot B$  é  $(p+q)^2$  e  $(p+q)^2 \geq 0, \forall p, q \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{b) 1) } A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & p \\ 1 & p & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ q \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} x & + & z \\ x + 2y + pz \\ x + py + z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ q \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = p \\ x + 2y + pz = 0 \\ x + py + z = q \end{cases} \end{aligned}$$

2) Esse sistema será SPI se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & p \\ 1 & p & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ e } \begin{vmatrix} 1 & 0 & p \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & p & q \end{vmatrix} = 0$$

$$3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & p \\ 1 & p & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow p^2 - p = 0 \Leftrightarrow p = 0 \text{ ou } p = 1$$

$$4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & p \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & p & q \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2q + p^2 - 2p = 0$$

5) Se  $p = 0$ , então  $2q + 0^2 - 2 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow q = 0$

Se  $p = 1$ , então  $2q + 1^2 - 2 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$

Respostas: a) demonstração

b)  $(p = 0 \text{ e } q = 0)$  ou  $(p = 1 \text{ e } q = \frac{1}{2})$