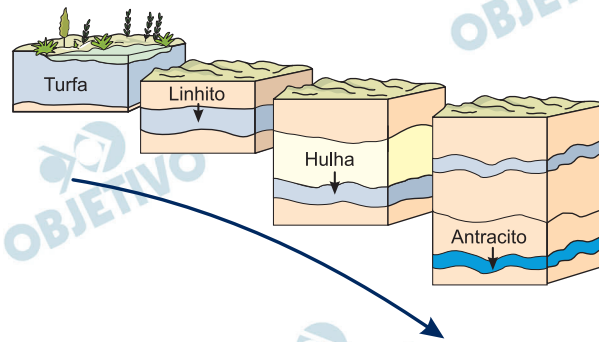


- a) Explique por que a Groenlândia e a Península Arábica, que possuem aproximadamente a mesma superfície em km^2 , no mapa-múndi acima apresentam dimensões tão discrepantes, e indique qual é a projeção desse mapa-múndi.
- b) Defina escala cartográfica e indique se o mapa acima apresenta uma escala grande ou pequena.

Resolução

- a) **Por causa da Projeção de Mercator, projeção conforme, que prioriza a forma em detrimento da proporcionalidade das áreas continentais, em que os meridianos se mantêm paralelos, alargando as regiões de grande latitude.**
- b) **Escala é uma fração que expressa uma relação matemática de proporção entre a realidade e o mapa, ou seja, o quanto as distâncias reais foram reduzidas para serem contidas no mapa. Trata-se de uma escala pequena, que reduz os detalhes, mas permite cartografar uma ampla área.**



(Fonte: http://cours-examens.org/images/An_2015_1/Etudes_superieures/Agronomie/Geologie/Laval/40_3_3_2.pdf. Acessado em 13/07/2016.)

- a) Conforme o esboço acima, explique como se dá o processo de formação do carvão mineral e indique qual dos tipos listados acima possui o menor porcentual de carbono e qual possui o maior porcentual de carbono.
- b) Apresente pelo menos duas formas de uso do carvão mineral.

Resolução

- a) O carvão mineral se forma pelo processo de fossilização da matéria orgânica continental, como restos de plantas e madeiras soterradas, e sem contato com o ar atmosférico, por milhões de anos, em que terminam por perder oxigênio e hidrogênio, resultando em uma concentração elevada de carbono. O período geológico de formação foi o permocarbonífero da Era Paleozoica. O tipo listado em que ocorre uma menor concentração de carbono é a turfa, enquanto o de maior concentração é o antracito.
- b) As mais frequentes utilizações do carvão são:
- produção de energia térmica, devido ao seu elevado poder calorífico;
 - aquecimento de fornos do setor siderúrgico (redutor siderúrgico);
 - fabricação de explosivos;
 - combustível em locomotivas;
 - coque, na produção do aço.

A Amazônia vem, neste início de século, despontando como um novo *front* energético do território brasileiro. Envolvendo questões bastante controvertidas, encontramos as grandes hidroelétricas de Santo Antônio e Jirau, no Rio Madeira (Rondônia), e Belo Monte, no rio Xingu (Pará). Além dessas obras, há ainda projetos de construção de novas grandes hidroelétricas, como a usina de São Luiz do Tapajós, no rio Tapajós (Pará). A construção de novas hidroelétricas deve responder pelo aumento do consumo de energia elétrica que acompanha os processos de urbanização e industrialização no país.

- a) Que região brasileira apresenta o maior potencial hidroelétrico instalado atualmente e por que a Amazônia tornou-se um novo *front* para a construção de grandes hidroelétricas?
- b) Indique qual dos setores, comercial, industrial e residencial, apresenta o maior e o menor consumo de energia elétrica no Brasil e cite um exemplo de indústria energointensiva existente na Amazônia.

Resolução

- a) **A Região Sudeste do Brasil é a que apresenta o maior potencial hidroelétrico instalado – com destaque para o Complexo Urubupungá, Ilha Solteira, Itumbiara, São Simão, Jupia, Marimondo, na Bacia do Paraná. No entanto, a Amazônia vem-se transformando numa região de grande crescimento de potencial hidráulico instalado devido a fatores como: grande potencial hidráulico regional, na maior parte subexplorado; demanda crescente devido à expansão da economia e a dificuldades para a exploração do potencial hidráulico remanescente da região Centro-Sul – onde a demanda é maior e mais intenso o povoamento –, o que traz dificuldades relativas às desapropriações, forte pressão ambientalista, além do que este potencial não permite a implantação de uma grande usina geradora, pois está pulverizado em pequenas quedas de água.**
- b) **Entre os setores econômicos enunciados, o que mais consome energia hidroelétrica é o industrial, e o menor consumo é do setor comercial. A indústria metalúrgica, especificamente a produção de metais não ferrosos, como o alumínio, é o principal setor energointensivo da Amazônia. O processo de eletrólise relacionado com este setor industrial demanda grande quantidade de energia.**

A região destacada na figura abaixo, conhecida pelo acrônimo MATOPIBA, é formada por frações dos territórios do Maranhão, Tocantins, Piauí e Bahia, por onde se expande a fronteira agrícola no Brasil. Reúne 337 municípios e representa aproximadamente 73 milhões de hectares. Existem na área cerca de 327 estabelecimentos agrícolas, 46 unidades de conservação, 35 terras indígenas e 778 assentamentos de reforma agrária.

(Adaptado de EMBRAPA <https://www.embrapa.br>. Acessado em 10/08/2016.)



- A difusão do moderno circuito da produção agrícola reorganizou aceleradamente o espaço regional em questão e fez proliferar inúmeros conflitos territoriais. Mencione ao menos dois agentes que, em lados opostos, disputam um sentido para essas transformações territoriais (ou modernizações).
- Indique o tipo de bioma e a cultura agrícola predominantes na região.

Resolução

- Podem ser citados como agentes em oposição nos inúmeros conflitos regionais: Os *proprietários de terras* – geralmente latifundiários –, que se apropriam de grandes extensões a fim produzir para o mercado extrarregional, e os *trabalhadores rurais sem terra*, que reivindicam frações das novas áreas agrícolas visando à produção para a subsistência.
- O bioma predominante na região é o *Cerrado*, formação savânica arbustiva característica de área de clima tropical continental, e a cultura prevalente nestas áreas de fronteira agrícola é a *soja*.

Imagem de um antigo palacete na Vila Itoororó, em São Paulo-SP, que se tornou um cortiço.



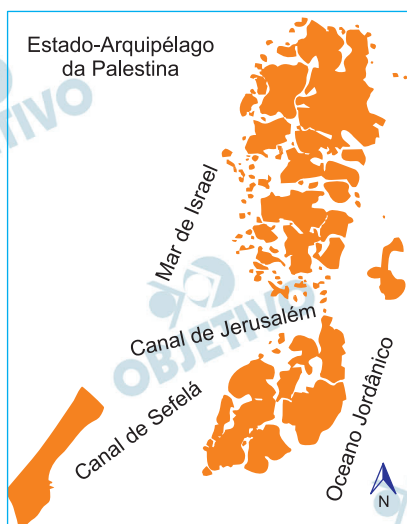
(Fonte: <http://g1.globo.com/Noticias/SaoPaulo/0,MUL1449740-5605,0>. Acessado em 23/06/2016.)

- a) O que define os cortiços? Em que momento da urbanização brasileira eles surgiram?
- b) Aponte ao menos dois fatores que explicam a permanência dos cortiços nas grandes cidades brasileiras ainda hoje.

Resolução

- a) **Cortiço é um tipo de submoradia que surge a partir da deterioração de uma área – geralmente residencial – devido à precarização de sua infraestrutura. O processo que leva ao surgimento de um cortiço compreende a depreciação e a desvalorização de uma área que outrora integrava a infraestrutura urbana mas que foi degradada pelo superpovoamento e pela ocupação irregular. Embora existam registros de formas de residência análogas aos cortiços já no século XIX, foi com a intensificação do processo de urbanização, a partir da década de 1950 que o fenômeno se expandiu com maior velocidade.**
- b) **Entre os fatores responsáveis pela permanência deste tipo de submoradia na paisagem urbana brasileira, destacam-se a falta de controle efetivo da ocupação do espaço urbano, o processo de especulação imobiliária, a incapacidade do poder público de assegurar à população a infraestrutura mais elementar (sobretudo nas áreas urbanas), crescimento da população de baixa renda – potenciais habitantes deste tipo de ocupação precária – num ritmo superior à ação mitigadora do Estado no que tange à falta de moradias.**

A figura abaixo é uma arte cartográfica produzida pelo artista Julien Bousac.



(Adaptado de <http://obgeographiques.blogspot.com.br>. Acessado em 03/08/2016.)

- Por que essa arte cartográfica, produzida pelo artista Julien Bousac, retrata a Palestina como um arquipélago? E quais são os dois territórios reservados atualmente aos palestinos, retratados nessa arte?
- Os conflitos entre israelenses e palestinos têm sido marcados por muita violência, tanto física ou aberta quanto simbólica. Indique uma forma de violência física e uma forma de violência simbólica a que estão expostos os palestinos.

Resolução

- A arte cartográfica representada manifesta a perspectiva do autor que critica a fragmentação das áreas sob controle palestino, decorrente da não efetivação dos acordos firmados entre o Estado de Israel e a Autoridade Nacional Palestina. Segundo estes acordos, a Faixa de Gaza e a Cisjordânia deverão ser entregues aos palestinos para a formação de seu país.
- A violência física manifesta-se nos conflitos armados que vitimam milhares de jovens – principalmente; no controle de fronteiras, que limita o acesso de palestinos aos territórios de Gaza e de Cisjordânia; nos campos de refugiados palestinos, alguns deles com mais de 50 anos; nos atentados terroristas que paralisam o processo de paz, além de impor a palestinos e israelenses grandes prejuízos materiais com ceifamento de milhares de vidas. A violência simbólica consiste na apropriação da denominação Palestina como uma região distinta de Israel, sabendo que Israel se situa na Palestina; o não reconhecimento do *status* de refugiados de milhares de palestinos que vivem em territórios ocupados por Israel, a construção do Muro da

Cisjordânia, e a afirmação – tanto de palestinos árabes quanto de israelenses – de Jerusalém como a capital de seus respectivos países, o que não foi reconhecido pelas Nações Unidas.

7

“Onde está aquela tua prudência? Onde está a sagacidade nas coisas que se devem discernir? Onde está a grandeza de alma? Já as pequenas coisas te afligem? (...) Nenhuma destas coisas é insólita, nenhuma inesperada. Ofender-te com estas coisas é tão ridículo quanto te queixares porque caíste em público ou porque te sujaste na lama. (...) O inverno faz vir o frio: é necessário gelar. O tempo traz de novo o calor: é necessário arder. A intempérie do céu provoca a saúde: é necessário adoecer. Uma fera em algum lugar se aproximará de nós, e um homem mais pernicioso que todas as feras. Algo a água, algo o fogo nos retirará. Esta condição das coisas não podemos mudar. Mas isto podemos: adotar um espírito elevado e digno do homem nobre para que corajosamente suportemos as coisas fortuitas e nos harmonizemos com a Natureza.”

(Sêneca, Carta de Sêneca a Lucílio, CVII. *Prometeus*,

Maceió, ano 1 – n.º 1, p.121, jan.-jun. 2008. Disponível em

<https://www.academia.edu/4204064>. Acessado em 19/12/2016.)

A partir da leitura do texto escrito pelo filósofo Sêneca,

- a) identifique e explique um princípio do estoicismo latino;
- b) cite dois legados culturais do mundo romano, além da filosofia, para a tradição ocidental.

Resolução

- a) **Combater a paixão e a luxúria e desenvolver virtudes morais. Segundo o estoicismo, haveria uma ordem moral na Natureza e no Universo, com a qual, em escala existencial, o homem, para construir ou encontrar a felicidade, deve regular seu comportamento ético, desprezando sentimentos externos que despertam a paixão e a luxúria.**
- b) **O direito, a língua latina, a religião cristã (ainda que de origem oriental), a organização administrativa e as técnicas da construção civil.**

Ao analisar *A primeira missa no Brasil*, obra de 1860, feita por Victor Meirelles e exposta atualmente no Museu Nacional de Belas Artes, no Rio de Janeiro, o historiador Rafael Cardoso inseriu o quadro no gênero da pintura histórica. Para o autor, tal gênero “deveria partir de um grande e elevado tema e mostrar o domínio do pintor de um amplo leque de informações não pictóricas. Ou seja, em meados do século XIX, tanto a correção da indumentária representada quanto o espírito cívico da obra eram sujeitos a exame detalhado. O quadro teria grandes formatos, composições complexas e perfeito acabamento. A realização de uma pintura assim poderia levar anos e geralmente correspondia a um atestado de amadurecimento do pintor.”

(Adaptado de Rafael Cardoso, *A arte brasileira em 25 quadros* (1790-1930). Rio de Janeiro/São Paulo: Record, 2008, p. 54-55.)



(<http://mnba.gov.br/portal/colecoes/pintura-brasileira.html>.
Acessado em 28/09/2016.)

- Explique as razões pelas quais podemos considerar que a obra em questão é baseada em uma noção de história oficial e heroica.
- Qual era a visão predominante dos integrantes da Semana de Arte Moderna de 1922 em relação à arte acadêmica? Justifique sua resposta.

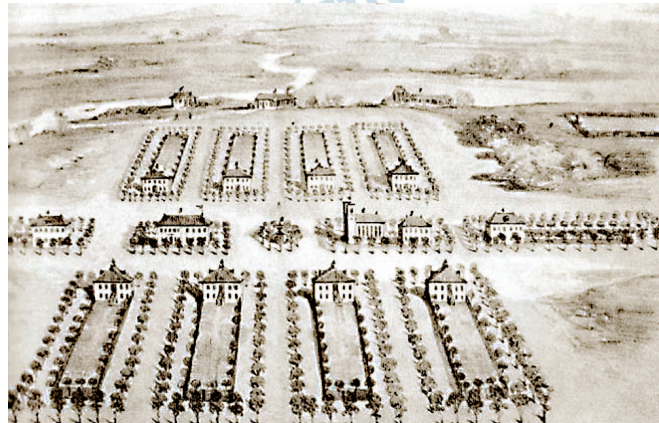
Resolução

- A ideia de uma obra de arte baseada na “noção de história oficial e heroica” pode ser corroborada pelos seguintes aspectos: escolha de um evento de grande importância para a formação da nacionalidade brasileira (sob o ponto de vista da elite dominante), romantizando a relação entre dois grupos étnicos formadores do povo brasileiro, dentro de um padrão estético apoiado na grandiosidade da composição e na precisão do desenho. Deve-se acrescentar o aspecto religioso do tema, enfatizando a importância da Igreja Católica tanto na época do Descobrimento como no Segundo Reinado, quando Vítor Meireles

pintou a tela em questão.

- b) Os integrantes da Semana de Arte Moderna de 1922, na condição de representantes da vanguarda intelectual e artística da época, criticavam o academicismo dominante na arte brasileira de então, por ser fortemente influenciado pelos padrões europeus e por apresentar uma visão distorcida da realidade brasileira, dentro de uma estética superada pela modernidade.

9



Projeto de uma vila agrícola – Teresa – para dez famílias, que poderão chegar a cem. O nome foi dado em homenagem à imperatriz d. Teresa Cristina pelo autor do projeto, o médico Jean Maurice Faivre. A planta mostra, ao centro, uma fonte rodeada de árvores, tendo ao lado uma casa comunitária com biblioteca, gabinete de história natural e laboratório de química e física, também cercada de árvores. Ao redor estão dispostas dez casas assobradadas com jardins e árvores circundantes, em meio a uma várzea aprazível. Nos arredores situam-se moinhos; um estabelecimento para tecelagem; serraria, forja e carpintaria; olaria e cemitério. Encorajado pelo imperador, Faivre trouxe da França uma leva de imigrantes. Instalou-se com eles no interior do Paraná, às margens do rio Ivaí, onde fundou uma colônia, Teresina, de efêmera duração”.

(Litografia. 32,5 x 18 cm. Rio de Janeiro, s.d. IHGB.

Em João Antônio de Paula, “O processo econômico”, em Lilia Moritz Schwarcz (dir.), *História do Brasil Nação*.

Vol 2. Rio de Janeiro: Objetiva, 2012, p. 201.)

- a) Cite e explique um princípio do discurso da medicina sanitarista desenvolvida no século XIX, presente na constituição da vila agrícola Teresa.
- b) Contextualize o cenário político do Brasil Império que incentivou o estabelecimento das colônias agrícolas.

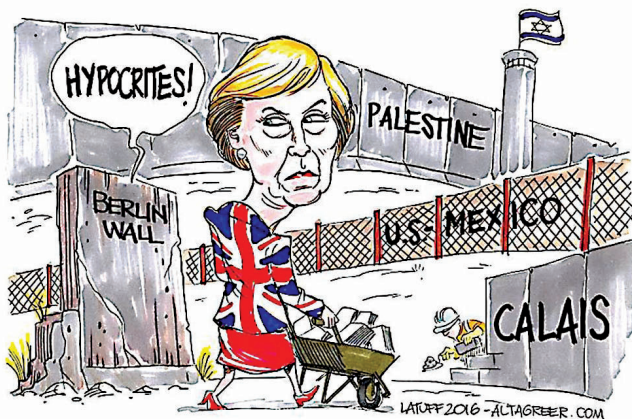
Resolução

- a) A medicina sanitarista (voltada para a preservação da saúde pública) do século XIX defendia a

existência de espaços que permitissem a livre circulação do ar, para evitar a propagação de moléstias, e também a manutenção de condições favoráveis de higiene e limpeza, com o mesmo objetivo. Tais características são claramente perceptíveis na disposição das construções e no espaçamento entre elas, bem como na expressão “várzea aprazível”, que implica a existência de um meio circundante salubre.

- b) Na época em que Jean Maurice Faivre apresentou seu projeto de colônia a ser instalada no Brasil (1847, início do Segundo Reinado), uma preocupação das autoridades brasileiras era o povoamento do Sul, por se tratar de uma região fronteiriça com baixa densidade demográfica. A preferência por colonos de origem europeia prendia-se à ideia de “branquear” a população do Brasil, de acordo com as teorias acerca da pretensa superioridade da raça branca que circulavam na Europa. Adicionalmente, deve-se observar que, à época do projeto de Faivre, a escravidão dava sinais de declínio no País, tendo em vista os efeitos do *Bill Aberdeen* (1845) sobre o tráfico de escravos africanos (o qual seria extinto em 1850).

10



(Disponível em

<https://desertpeace.wordpress.com/2016/09/09/assorted-toons-for-the-end-of-the-week/cr1n3uyxaaa1o7f>. Acessado em 10/11/2016.)

A charge de Carlos Latuff, publicada em 2016, faz associações sobre diversos processos do mundo contemporâneo. A primeira-ministra britânica, Theresa May, ouve uma voz enquanto carrega tijolos para a construção de um polêmico muro em Calais, na França.

- a) Explique qual é a justificativa histórica para a exclamação “hipócritas” oriunda do muro de Berlim.
- b) Por que a questão dos muros tornou-se um assunto recorrente na política internacional do século XXI? Justifique sua resposta a partir de uma das referências da charge.

Resolução

a) A exclamação “Hipócritas!” justifica-se historicamente porque os mesmos países que criticaram a construção do Muro de Berlim (Estados Unidos, Reino Unido e outros representantes do autodenominado “Mundo Livre”), no contexto da Guerra Fria, defendem na atualidade a construção de muros que, nos presentes casos, visam impedir a circulação de pessoas pertencentes a nações consideradas “indesejadas”, ou ao menos indignas de confiança. Além disso, os mesmos que advogavam o livre trânsito de pessoas e, mais recentemente, alardeavam os benefícios da globalização, atualmente se posicionam em favor de um isolacionismo que vai de encontro à própria ideia de liberdade.

b) No final do século XX e início do XXI, por motivos distintos, certos governos desenvolveram a ideia de levantar muros para impedir ou controlar a entrada de pessoas em seus respectivos territórios, dentro de uma óptica nacionalista próxima da xenofobia. Nos casos mencionados na charge, os motivos para a construção dos muros são os seguintes:

Reino Unido: esforço para impedir a entrada de refugiados (motivados por guerras ou por dificuldades econômicas) procedentes da África e do Oriente Médio, tendo o porto francês de Calais como escala para ingressar no território britânico.
Estados Unidos: tentativa de barrar a entrada de imigrantes ilegais procedentes do México ou de outros países latino-americanos.

Israel: recurso para controlar a entrada de trabalhadores palestinos em território israelense.

O ano de 1968 foi modelar: protestos, tumultos e motins em Praga, Chicago, Paris, Tóquio, Belgrado, Roma, México, Santiago... Da mesma maneira que as epidemias medievais não respeitavam as fronteiras religiosas nem as hierarquias sociais, a rebelião juvenil anulou as classificações ideológicas.

No México, as reivindicações se resumiam a uma palavra: democratização. Os jovens pediram repetidas vezes “diálogo entre o governo e os estudantes”. A atitude dos estudantes dava ao governo a possibilidade de reorientar sua política. Bastaria ouvir o que o povo dizia por meio das reivindicações juvenis; ninguém esperava uma mudança radical, mas sim maior flexibilidade e uma volta à tradição da Revolução Mexicana, que nunca foi muito dogmática e sim muito sensível às mudanças no ânimo popular.

(Adaptado de Octavio Paz, *O labirinto da solidão*.

São Paulo: Cosac Naify, 2014, p. 215; 222.)

A partir do texto e de seus conhecimentos,

- a) caracterize o sistema político mexicano em 1968 e indique um aspecto da Revolução Mexicana (1910-1917) reivindicado pelos estudantes naquele contexto;
- b) cite dois instantes do protagonismo juvenil na história brasileira após 1960.

Resolução

- a) **República aparentemente democrática, mas alicerçada em uma rede de influências, de clientelismo e de repressão que assegurava o continuísmo do PRI (Partido Revolucionário Institucional) no poder.**

Aspecto da Revolução Mexicana reivindicado pelos estudantes: participação das camadas populares no processo político.

- b) **“Passeata dos Cem Mil” no Rio de Janeiro, em 1968, entre outras manifestações contra o regime militar.**

Movimento dos “Caras Pintadas” contra Collor, em 1992.

“Naquele lugar, a guerra tinha morto a história. Pelos caminhos só as hienas se arrastavam, focinhando entre cinzas e poeiras. A paisagem se mestiçara de tristezas nunca vistas, em cores que se pegavam à boca. (...) Aqui, o céu se tornara impossível. E os viventes se acostumaram ao chão, em resignada aprendizagem da morte.

A estrada que agora se abre aos nossos olhos não se entrecruza com outra nenhuma. (...)

Um velho e um miúdo vão seguindo pela estrada. (...) Fogem da guerra, dessa guerra que contaminara toda sua terra. Vão na ilusão de, mais além, haver um refúgio tranquilo. Avançam descalços, suas vestes têm a mesma cor do caminho. O velho se chama Tuahir. É magro, parece ter perdido toda sua substância. O jovem se chama Muidinga. Caminha à frente desde que saíra do campo de refugiados”.

(Mia Couto, *Terra sonâmbula*.

São Paulo: Companhia das Letras, 2007, p. 9-10.)

O trecho acima, escrito por Mia Couto, traz uma narrativa sobre o cenário de guerra de Moçambique pós-independência (1977-1992). A partir do texto, responda às questões abaixo.

- a) O que são refugiados? Explique, relacionando-os ao processo moçambicano.
- b) Apresente dois elementos históricos comuns a Angola e Moçambique, após a independência do domínio português.

Resolução

- a) **Refugiados são os indivíduos que se deslocam dentro do próprio país ou deste para outros, forçados por motivos diversos (guerras, miséria, catástrofes naturais ou perseguições de caráter político, religioso, étnico ou social). Os descendentes desses migrantes podem também ser considerados refugiados. No processo moçambicano, a existência de refugiados deveu-se à situação de guerra vivida pelo país após sua independência.**
- b) **Tanto Angola como Moçambique sofreram longas guerras civis após a independência e se alinharam com a URSS no contexto da Guerra Fria.**

Diversas padarias e lanchonetes vendem o “cafezinho” e o “cafezinho com leite”. Uma pesquisa realizada na cidade de Campinas registrou uma variação grande de preços entre dois estabelecimentos, A e B, que vendem esses produtos com um volume de 60 ml, conforme mostra a tabela abaixo.

Produto	A	B
Cafezinho	R\$ 2,00	R\$ 3,00
Cafezinho com leite	R\$ 2,50	R\$ 4,00

- a) Determine a variação percentual dos preços do estabelecimento A para o estabelecimento B, para os dois produtos.
- b) Considere a proporção de café e de leite servida nesses dois produtos conforme indica a figura abaixo. Suponha que o preço cobrado se refere apenas às quantidades de café e de leite servidas. Com base nos preços praticados no estabelecimento B, calcule o valor que está sendo cobrado por um litro de leite.



Resolução

- a) Como $\frac{\text{R\$ } 3,00}{\text{R\$ } 2,00} = 1,50$ e $\frac{\text{R\$ } 4,00}{\text{R\$ } 2,50} = 1,60$, na padaria B o preço do café é 50% superior ao respectivo preço em A. De modo análogo, o preço do café com leite é 60% superior na padaria B.

- b) Se 60 ml de café da padaria B custam R\$ 3,00, então 40 ml custam R\$ 2,00.

Assim, 20 ml de leite na padaria B custam R\$ (4,00 – 2,00) = R\$ 2,00, e 1000 ml (1 litro)

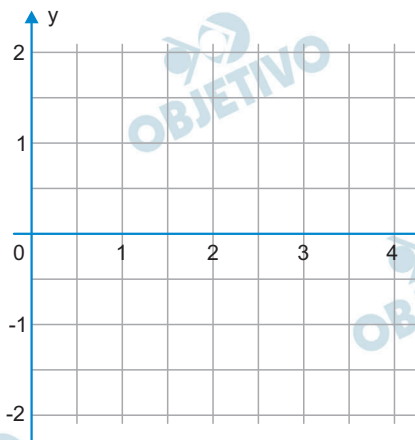
custam R\$ $\left(\frac{2,00}{20} \cdot 1000 \right) = \text{R\$ } 100,00$.

Respostas: a) 50% e 60%

b) R\$ 100,00

Sejam c um número real e $f(x) = x^2 - 4x + c$ uma função quadrática definida para todo número real x . No plano cartesiano, considere a parábola dada pelo gráfico de $y = f(x)$.

- a) Determine c no caso em que a abscissa e a ordenada do vértice da parábola têm soma nula e esboce o respectivo gráfico para $0 \leq x \leq 4$.



- b) Considere os pontos de coordenadas $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, onde a e b são números reais com $a < b$. Sabendo que o ponto médio do segmento \overline{AB} é $M = (1, c)$, determine a e b .

Resolução

- a) A abscissa e a ordenada do vértice da parábola $y = f(x)$ são dadas respectivamente por:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-16 + 4c}{4} = -4 + c$$

Como a soma da abscissa e da ordenada do vértice deve ser nula, temos:

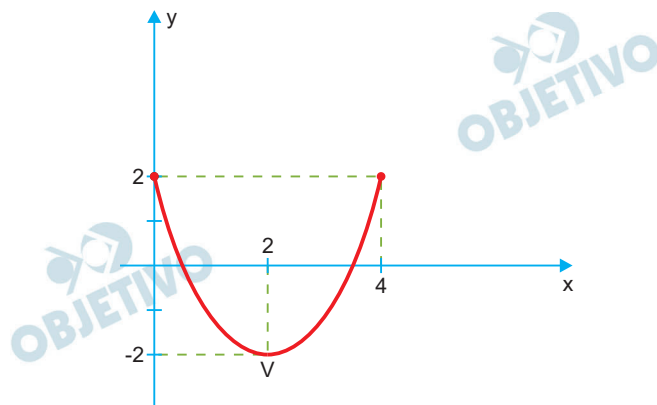
$$-4 + c + 2 = 0 \Rightarrow c = 2$$

Assim, $f(x) = x^2 - 4x + 2$; logo, o gráfico de $y = f(x)$

para $0 \leq x \leq 4$ será:

$$x = 0 \Rightarrow f(x) = 2$$

$$x = 4 \Rightarrow f(x) = 2$$



b) Como $f(x) = x^2 - 4x + 2$, temos:

$$A = (a; f(a)) \Rightarrow A = (a; a^2 - 4a + 2)$$

$$B = (b; f(b)) \Rightarrow B = (b; b^2 - 4b + 2)$$

$M = (1; c)$ é o ponto médio de \overline{AB} , assim:

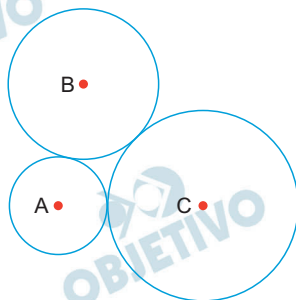
$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 2 \\ \frac{a^2 - 4a + 2 + b^2 - 4b + 2}{2} = 2 \end{cases}$$

Do que se obtêm $a = 1 - \sqrt{3}$ e $b = 1 + \sqrt{3}$, pois $b > a$.

Respostas: a) $c = 2$; gráfico

$$b) a = 1 - \sqrt{3}; b = 1 + \sqrt{3}$$

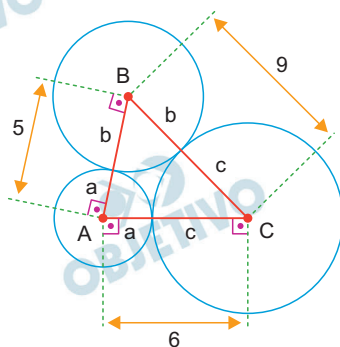
A figura abaixo exibe três círculos no plano, tangentes dois a dois, com centros em A, B e C e raios de comprimentos a, b e c, respectivamente.



- a) Determine os valores de a, b e c, sabendo que a distância entre A e B é de 5 cm, a distância entre A e C é de 6 cm e a distância entre B e C é de 9 cm.
- b) Para a = 2 cm e b = 3 cm, determine o valor de c > b de modo que o triângulo de vértices em A, B e C seja retângulo.

Resolução

a)



De acordo com o enunciado, sendo a, b e c em centímetros, temos:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a + c = 6 \\ b + c = 9 \end{cases} \Rightarrow 2a + 2b + 2c = 20 \Rightarrow a + b + c = 10$$

$$\text{Assim, } a + b + c = 10 \Rightarrow 5 + c = 10 \Rightarrow c = 5,$$

$$a + b + c = 10 \Rightarrow b + 6 = 10 \Rightarrow b = 4 \text{ e}$$

$$a + b + c = 10 \Rightarrow a + 9 = 10 \Rightarrow a = 1$$

b) Para a = 2 e b = 3, temos:

$$AB = 2 + 3 = 5, AC = 2 + c \text{ e } BC = 3 + c$$

Como \overline{BC} é o maior lado, o triângulo ABC é retângulo se, e somente se,:

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3 + c)^2 = 5^2 + (2 + c)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 + 6c + c^2 = 25 + 4 + 4c + c^2 \Rightarrow c = 10$$

Respostas: a) a = 1 cm, b = 4 cm e c = 5 cm

b) c = 10 cm

Sabendo que a e b são números reais, considere o polinômio cúbico $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$.

- a) Mostre que, se r é uma raiz de $p(x)$, então $1/r$ é uma raiz do polinômio $q(x) = x^3 + bx^2 + ax + 1$.
- b) Determine os valores de a e b para os quais a sequência $(p(-1), p(0), p(1))$ é uma progressão aritmética (PA), cuja razão é igual a $p(2)$.

Resolução

- a) Se $r \neq 0$ é raiz de $p(x)$, então

$$r^3 + a \cdot r^2 + b \cdot r + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + a \cdot \frac{1}{r} + b \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{r}\right)^3 + b \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^2 + a \cdot \frac{1}{r} + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \text{ é raiz de } q(x) = x^3 + bx^2 + a \cdot x + 1$$

b) $p(-1) = -1 + a - b + 1 = a - b$

$$p(0) = 1$$

$$p(1) = 1 + a + b + 1 = a + b + 2$$

$$p(2) = 8 + 4a + 2b + 1 = 4a + 2b + 9$$

Assim, se $p(-1)$, $p(0)$ e $p(1)$ estão, nessa ordem, em P.A. de razão $p(2)$, então:

$$\begin{cases} 1 - (a - b) = 4a + 2b + 9 \\ (a + b + 2) - 1 = 4a + 2b + 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a + b = -8 \\ 3a + b = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -8 \end{cases}$$

Respostas: a) demonstração

b) $a = 0$; $b = -8$

Sabendo que m é um número real, considere o sistema linear nas variáveis x , y e z :

$$\begin{cases} mx + 2z = 4 \\ x - y + z = 3 \\ 2x + mz = 4 \end{cases}$$

- a) Seja A a matriz dos coeficientes desse sistema. Determine os valores de m para os quais a soma dos quadrados dos elementos da matriz A é igual à soma dos elementos da matriz $A^2 = A \cdot A$.
- b) Para $m = 2$, encontre a solução do sistema linear para a qual o produto xyz é mínimo.

Resolução

No sistema $\begin{cases} mx + 2z = 4 \\ x - y + z = 3 \\ 2x + mz = 4 \end{cases}$, a matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} m & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{bmatrix}$

$$\text{a) } A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} m & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} m^2 + 4 & 0 & 4m \\ m + 1 & 1 & m + 1 \\ 4m & 0 & m^2 + 4 \end{bmatrix}$$

Se a soma dos quadrados dos elementos de A é igual à soma dos elementos de A^2 , então:

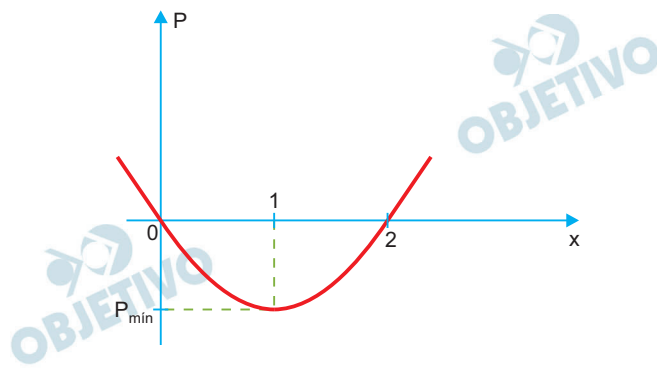
$$\begin{aligned} m^2 + 2^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2 + m^2 &= \\ &= (m^2 + 4) + 4m + (m + 1) + 1 + \\ &+ (m + 1) + 4m + (m^2 + 4) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2m^2 + 11 = 2m^2 + 10m + 11 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 10m = 0 \Rightarrow m = 0 \end{aligned}$$

$$\text{b) Para } m = 2, \text{ o sistema será } \begin{cases} 2x + 2z = 4 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

$$\text{Assim: } \begin{cases} z = 2 - x \\ y = -1 \end{cases}$$

O produto $P = x y z$ é tal que:

$$P = x \cdot (-1) \cdot (2 - x) = x^2 - 2x, \text{ e é mínimo para } x = 1, \text{ pois o gráfico de } P \text{ é do tipo}$$



Desta forma, para $x = 1$, tem-se $z = 2 - 1 = 1$ e a solução do sistema é $x = 1, y = -1$ e $z = 1$

Respostas: a) $m = 0$

b) A solução é $(1; -1; 1)$

Sabendo que k é um número real, considere a função $f(x) = k \operatorname{sen} x + \cos x$, definida para todo número real x .

- a) Seja t um número real tal que $f(t) = 0$. Mostre que $f(2t) = -1$.
- b) Para $k = 3$, encontre todas as soluções da equação $f(x)^2 + f(-x)^2 = 10$ para $0 \leq x \leq 2\pi$.

Resolução

a) $f(x) = k \operatorname{sen} x + \cos x$

Para $t \in \mathbb{R}$, temos:

$$f(t) = k \operatorname{sen} t + \cos t = 0, \quad k \operatorname{sen} t = -\cos t$$

Assim:

$$f(2t) = k \cdot \operatorname{sen}(2t) + \cos(2t) = k \cdot (2 \operatorname{sen} t \cdot \cos t) + 1 - 2 \operatorname{sen}^2 t = 2 \cos t \cdot (k \cdot \operatorname{sen} t) + 1 - 2 \operatorname{sen}^2 t$$

Desta forma:

$$f(2t) = 2 \cos t \cdot (-\cos t) + 1 - 2 \operatorname{sen}^2 t = -2(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) + 1 = -2 \cdot 1 + 1 = -1$$

b) Para $k = 3$, temos: $f(x) = 3 \operatorname{sen} x + \cos x$ e

$$f(-x) = 3 \operatorname{sen}(-x) + \cos(-x) = \cos x - 3 \operatorname{sen} x, \text{ pois } \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \text{ e } \cos(-x) = \cos x$$

Assim:

$$\begin{aligned} [f(x)]^2 + [f(-x)]^2 &= \\ &= (3 \operatorname{sen} x + \cos x)^2 + (\cos x - 3 \operatorname{sen} x)^2 = 10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9 \operatorname{sen}^2 x + 6 \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \cos^2 x + \\ &+ \cos^2 x - 6 \operatorname{sen} x \cdot \cos x + 9 \operatorname{sen}^2 x = 10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 18 \operatorname{sen}^2 x + 2 \cos^2 x = 10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 18(1 - \cos^2 x) + 2 \cos^2 x = 10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 16 \cos^2 x = 8 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} \text{ ou}$$

$$x = \frac{5\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4}$$

Respostas: a) Demonstração

b) $\left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\}$