

# M.01

Resolva os três itens abaixo.

- O primeiro termo de uma progressão geométrica de razão positiva é 5, e o terceiro termo é 45. Calcule a soma dos 6 primeiros termos dessa progressão.
- Calcule a soma dos números inteiros positivos menores do que 112 e não divisíveis por 4.
- A soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão aritmética é  $n(2n + 1)$ , qualquer que seja  $n \geq 1$ . Encontre o vigésimo termo dessa progressão.

## Resolução

- a) Sendo  $a_1 = 5$  e  $a_3 = 45$  o primeiro e o terceiro termo de uma progressão geométrica de razão “ $q$ ”, temos:

$$a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} \Leftrightarrow 45 = 5 \cdot q^2 \Leftrightarrow q = 3, \text{ pois a razão é positiva.}$$

$$\text{Assim, } S_6 = \frac{a_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{5 \cdot (3^6 - 1)}{3 - 1} = 1820$$

- b) Seja  $S_t$ ,  $S_d$  e  $S_n$  respectivamente as somas de todos inteiros positivos menores que 112, a soma dos inteiros positivos menores que 112 e divisíveis por 4 e  $S_n$  a soma dos inteiros positivos menores que 112 e não divisíveis por 4. Assim,

$$S_t = \frac{(1 + 111) \cdot 111}{2} = 6216,$$

$$S_d = \frac{(4 + 108) \cdot 27}{2} = 1512, \text{ pois de 1 a 111 existem}$$

27 múltiplos de 4.

$$\text{Desta forma, } S_n = S_t - S_d = 6216 - 1512 = 4704$$

- c) Se  $S_n = n(2n + 1)$  é a soma dos  $n$  primeiros termos de uma PA, qualquer que seja  $n \geq 1$ , então

$$S_{20} = 20 \cdot (2 \cdot 20 + 1) = 820 \text{ e}$$

$$S_{19} = 19 \cdot (2 \cdot 19 + 1) = 741$$

Assim, o vigésimo termo desta PA é

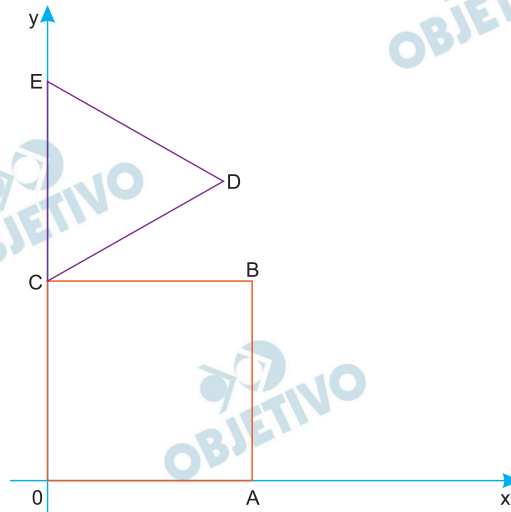
$$a_{20} = S_{20} - S_{19} = 820 - 741 = 79$$

Respostas: a) 1820

b) 4704

c) 79

## M.02

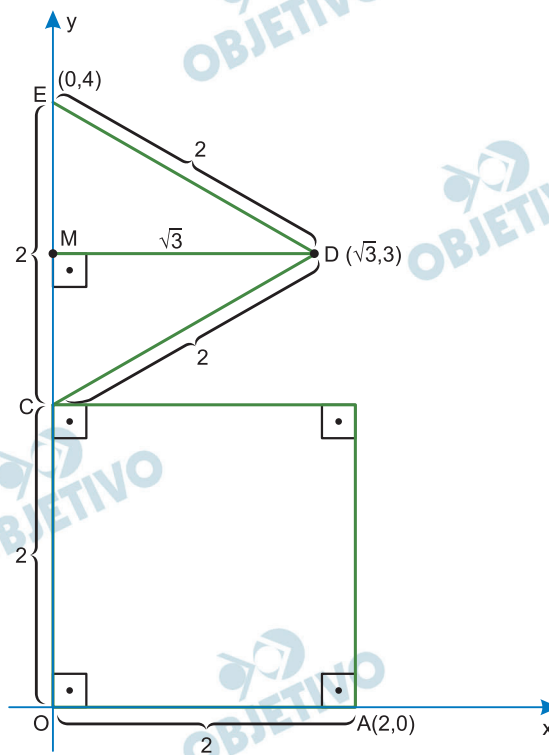


Na figura, OABC é um quadrado e CDE é um triângulo equilátero tal que  $OC = CE = 2$ .

- Determine a equação da reta que passa por E e por A.
- Determine a equação da reta que passa por D e é perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{AE}$ .
- Determine um ponto P no segmento OA, de modo que a reta que passa por E e por P divida o quadrado em duas regiões, de tal forma que a área da região que contém o segmento OC seja o dobro da área da outra região.

### Resolução

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



A equação da reta  $\overleftrightarrow{AE}$  é calculada por

a) 1)  $m_{AE} = \frac{0 - 4}{2 - 0} = -2$

$$2) y - 0 = -2(x - 2) \Leftrightarrow 2x + y - 4 = 0$$

- b) 1) Seja  $r$  a reta que passa por  $D$  e é perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{AE}$ , então

$$m_r \cdot (-2) = -1 \Leftrightarrow m_r = \frac{1}{2}$$

$$2) MD = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ (altura do equilátero)}$$

$$x_D = \sqrt{3}$$

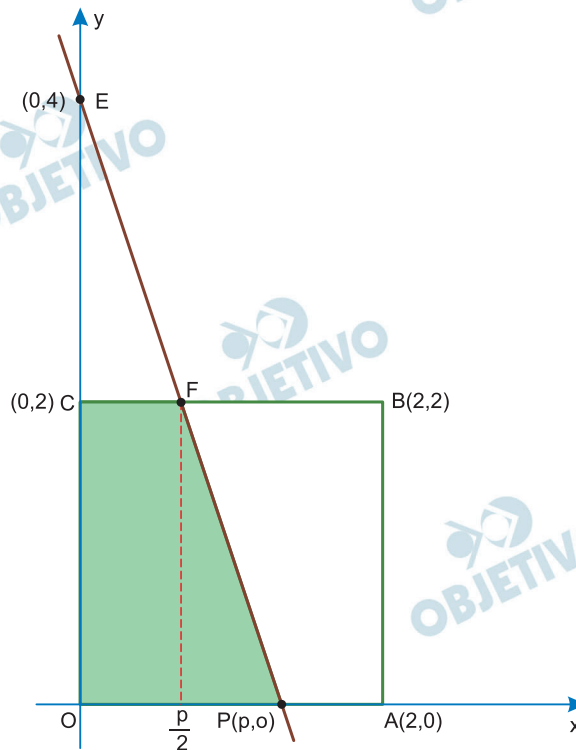
$$MO = OC + CM = 2 + 1 = 3$$

$$y_D = 3$$

$$\therefore D(\sqrt{3}; 3)$$

$$3) y - 3 = \frac{1}{2}(x - \sqrt{3}) \Leftrightarrow x - 2y + 6 - \sqrt{3} = 0$$

c)



- 1) A área do quadrilátero  $OPFC$  é o dobro da área do quadrilátero  $PABF$ , assim

$$S_{OPFC} + \frac{S_{OPFC}}{2} = 4 \Rightarrow S_{OPFC} = \frac{8}{3}$$

- 2) A equação da reta  $\overleftrightarrow{EP}$  é dada por

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{4} = 1$$

- 3) Ponto  $F$

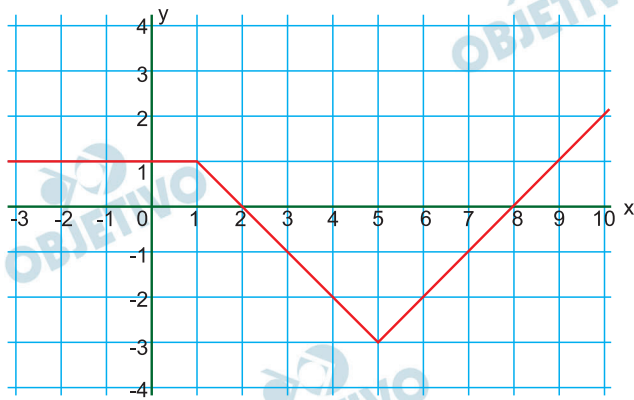
$$\begin{cases} y = 2 \\ \frac{x}{p} + \frac{y}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

4) No trapézio OPFC, temos:

$$\frac{\left(p + \frac{p}{2}\right) \cdot 2}{2} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow p = \frac{16}{9}$$

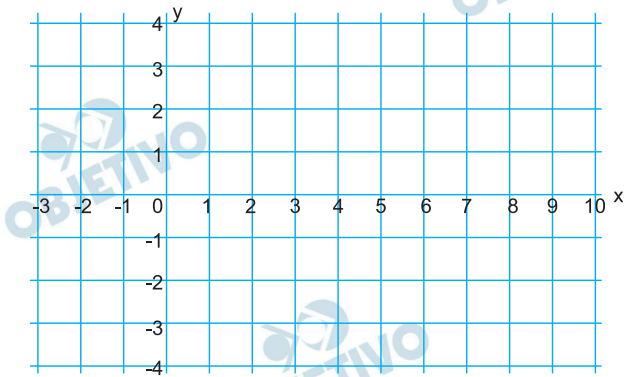
Assim, o ponto é  $P\left(\frac{16}{9}; 0\right)$

# M.03

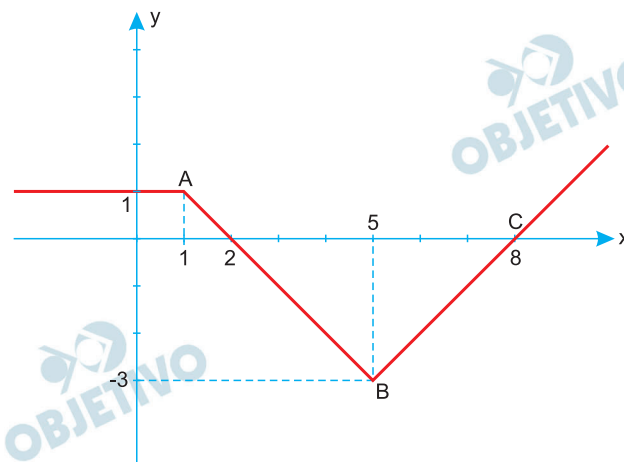


A figura mostra o gráfico de uma função  $f$ .

- a) Encontre todos os valores de  $x$  tais que  $f(x) = -1$ .
- b) Encontre todos os valores de  $x$  tais que  $|f(x) + 1| \leq 1$ .
- c) No sistema cartesiano da folha de respostas, desenhe o gráfico da função  $y = 1 - f(x + 2)$ .



## Resolução



A reta que contém os pontos A e B tem coeficiente

$$\text{angular } m_{\overleftrightarrow{AB}} = \frac{-3-1}{5-1} = -1 \text{ e equação } y = -x + 2.$$

A reta que contém os pontos B e C tem coeficiente

$$\text{angular } m_{\overleftrightarrow{BC}} = \frac{0-(-3)}{8-5} = 1 \text{ e equação } y = x - 8.$$

A função  $f$ , de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  está assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 1 \\ -x + 2; & \text{se } 1 \leq x \leq 5 \\ x - 8; & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$$

a)  $f(x) = -1 \Leftrightarrow (-x + 2 = -1 \text{ e } 1 \leq x \leq 5) \text{ ou}$

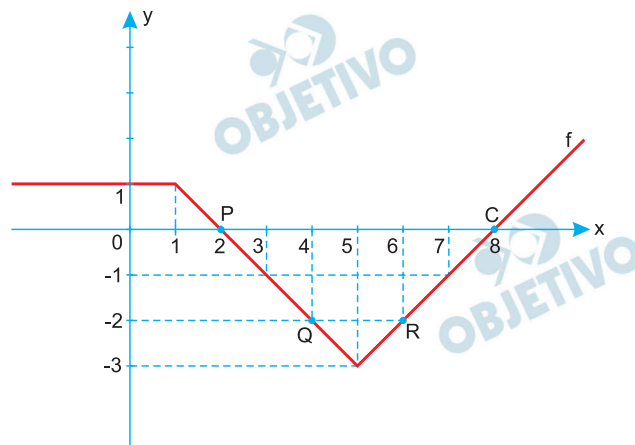
$$(x - 8 = -1 \text{ e } x \geq 5) \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = 7$$

b)  $|f(x) + 1| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq f(x) + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq f(x) \leq 0$

Como:  $f(x) = -2 \Leftrightarrow (-x + 2 = -2 \text{ e } 1 \leq x \leq 5) \text{ ou}$

$$(x - 8 = -2 \text{ e } x \geq 5) \Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = 6 \text{ e } f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 8, \text{ temos o seguinte gráfico de } f.$$

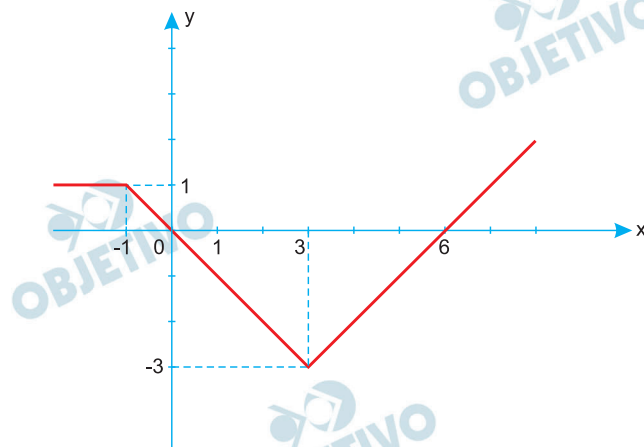


Conforme o gráfico,

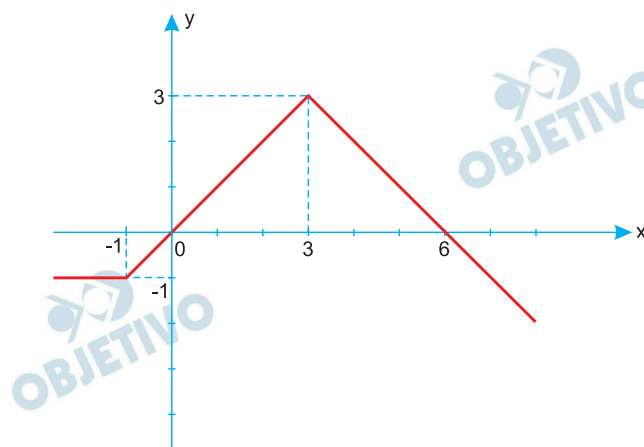
$$-2 \leq f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4 \text{ (segmento } \overline{PQ}) \text{ ou}$$

$$6 \leq x \leq 8 \text{ (segmento } \overline{RC}).$$

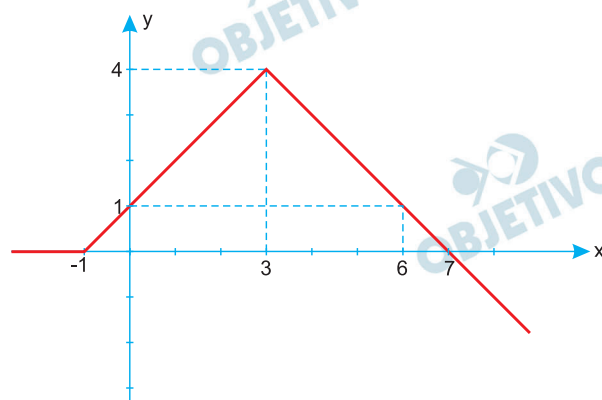
c) O gráfico de  $y = f(x + 2)$  é



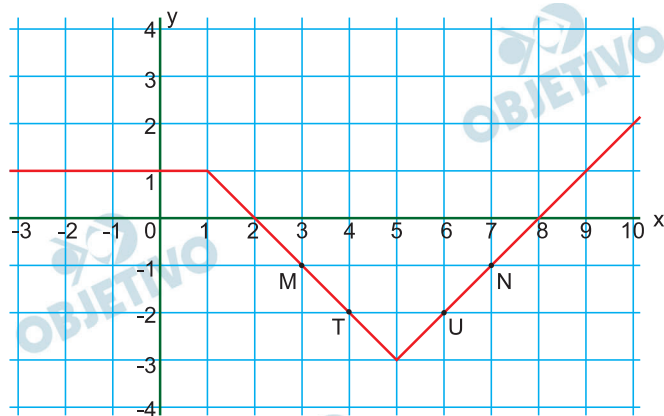
o gráfico de  $y = -f(x + 2)$  é



o gráfico de  $y = 1 - f(x + 2)$  é



**Obs.:** Talvez a proposta do examinador fosse apenas, uma solução gráfica, observando que  $M(3; -1)$ ,  $N(7; -1)$ ,  $T(4; -2)$  e  $U(6; -2)$ , conforme a figura:



Respostas: a)  $x = 3$  ou  $x = 7$

b)  $2 \leq x \leq 4$  ou  $6 \leq x \leq 8$

c) gráfico



## M.04

Uma urna tem A bolas azuis e B bolas brancas. Ao serem retiradas duas delas de uma só vez, aleatoriamente, a probabilidade de saírem duas bolas azuis é denotada por  $p_A$ , a probabilidade de saírem duas bolas brancas é denotada por  $p_B$ , e a probabilidade de saírem duas bolas de cores diferentes é denotada por  $p_M$ .

- Se  $A = 2$  e  $B = 5$ , determine  $p_B$ .
- Se o total de bolas da urna é 21 e  $p_M$  é o triplo de  $p_A$ , quantas bolas azuis e quantas bolas brancas há na urna?
- Se  $A = 3$ , para quais valores de B o valor de  $p_M$  é estritamente maior do que  $\frac{1}{2}$ ?

### Resolução

- a) Se  $A = 2$  e  $B = 5$ , então:

$$p_B = \frac{C_{5;2}}{C_{7;2}} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 6} = \frac{10}{21}$$

- b) Se  $A + B = 21$  e  $p_M = 3p_A$ , então:

$$2 \cdot \frac{A}{21} \cdot \frac{B}{20} = 3 \cdot \frac{A}{21} \cdot \frac{A-1}{20} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2AB = 3A(A-1) \Leftrightarrow A \cdot (2B - 3A + 3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } 2B - 3A + 3 = 0$$

Se  $A = 0$ , então  $B = 21$

Se  $A \neq 0$  e  $A + B = 21$ , então

$$2(21 - A) - 3A + 3 = 0 \Leftrightarrow 42 - 5A + 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5A = 45 \Leftrightarrow A = 9$$

Se  $A = 9$  e  $A + B = 21$ , então  $B = 12$

- c) Se  $A = 3$  e  $p_M > \frac{1}{2}$ , então

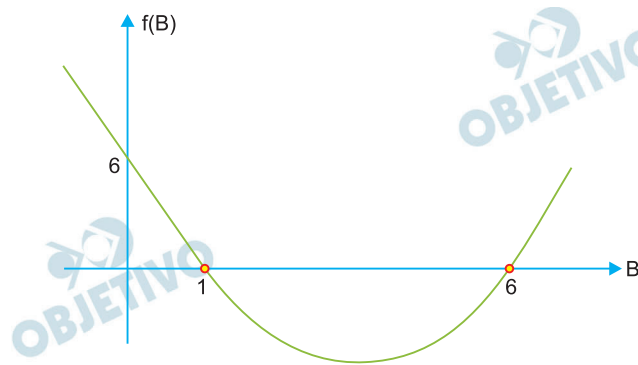
$$2 \cdot \frac{3}{B+3} \cdot \frac{B}{B+2} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (B+3)(B+2) < 12B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B^2 + 5B + 6 - 12B < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B^2 - 7B + 6 < 0 \Leftrightarrow 1 < B < 6,$$

pois o gráfico da função  $f(B) = B^2 - 7B + 6$  é do tipo



Respostas: a)  $\frac{10}{21}$

b)  $(A = 0 \text{ e } B = 21)$  ou  $(A = 9 \text{ e } B = 12)$

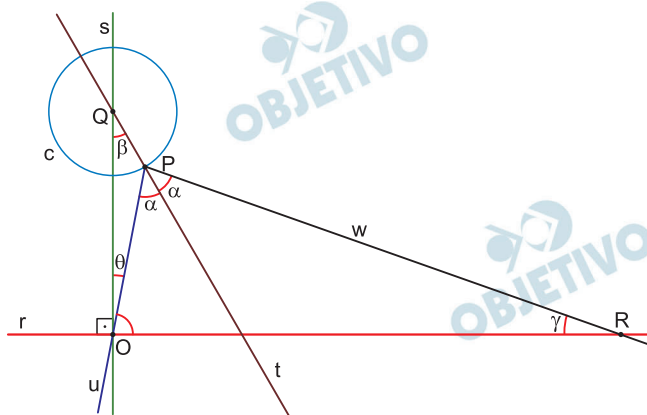
c)  $B \in \{2; 3; 4; 5\}$

## M.05

Conforme se vê na figura, em um plano, encontram-se:

- duas retas perpendiculares  $r$  e  $s$  e o ponto  $O$  de intersecção dessas duas retas;
- um ponto  $Q \in s$  tal que a medida de  $\overline{OQ}$  é 5;
- uma circunferência  $c$ , centrada em  $Q$ , de raio 1;
- um ponto  $P \in c$  tal que o segmento  $\overline{OP}$  intersecta  $c$  apenas em  $P$ .

Denotam-se  $\theta = \widehat{QOP}$  e  $\beta = \widehat{OQP}$ .



- Calcule  $\sin \theta$ , no caso em que  $\theta$  assume o máximo valor possível na descrição acima.
- Calcule  $\sin \theta$ , no caso em que  $\beta = 60^\circ$ .

Ainda na figura, encontram-se:

- a reta  $t$  contendo  $Q$  e  $P$ ;
- a semirreta  $u$  partindo de  $P$  e contendo  $O$ ;
- a semirreta  $w$  partindo de  $P$  para fora de  $c$  de modo que  $u$  e  $w$  estão em semiplanos distintos relativos a  $t$ .

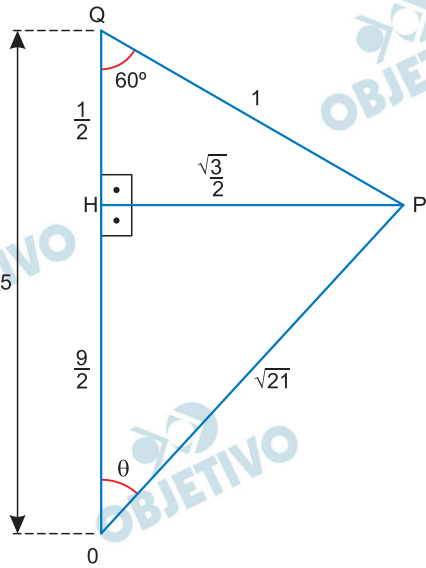
Supõe-se que os ângulos formados por  $u$  e  $t$  e por  $w$  e  $t$  sejam iguais a um certo valor  $\alpha$ , com  $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ . Caso  $w$  intersecte  $r$  (como é o caso da figura), denotam-se  $R$  como esse único ponto de intersecção e  $\gamma = \widehat{ORP}$ .

- Determine a medida de  $\overline{OR}$ , no caso em que  $\alpha = 45^\circ$ .

### Resolução

- Quando  $\theta$  é máximo a semirreta  $u$  tangencia a circunferência em  $P$ , portanto o triângulo  $QOP$  será retângulo em  $P$ ,  $\sin \theta = \frac{PQ}{OQ} \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{5}$

- Para  $\beta = 60^\circ$ , temos o seguinte triângulo  $OPQ$  da figura:



$$\text{I) } \sin 60^\circ = \frac{PH}{1} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{PH}{1} \Rightarrow PH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

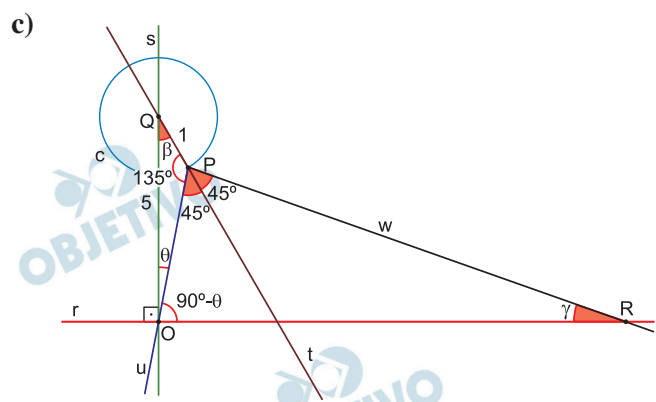
$$\text{II) } \cos 60^\circ = \frac{QH}{1} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{QH}{1} \Rightarrow QH = \frac{1}{2}$$

$$\text{III) } OH = OQ - QH = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\text{IV) } (PO)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow PO = \sqrt{21}$$

$$\text{Assim, } \sin \theta = \frac{PH}{PQ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{21}} \Rightarrow$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{14}$$



I) Aplicando a lei dos senos no triângulo OPQ, temos:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{5}{\operatorname{sen} 135^\circ} \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

II) Aplicando a lei dos cossenos no triângulo OPQ, temos:

$$5^2 = 1^2 + (\operatorname{OP})^2 - 2 \cdot 1 \cdot \operatorname{OP} \cdot \cos 135^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25 = 1 + (\operatorname{OP})^2 + \sqrt{2} \cdot \operatorname{OP} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\operatorname{OP})^2 + \sqrt{2} \cdot \operatorname{OP} - 24 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{OP} = \frac{-\sqrt{2} \pm 7\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{OP} = 3\sqrt{2}, \text{ pois } \operatorname{OP} > 0$$

III) Como  $\cos(90^\circ - \theta) = \operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{2}}{10}$ , temos:

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{\operatorname{OP}}{\operatorname{OR}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{3\sqrt{2}}{\operatorname{OR}} \Rightarrow \operatorname{OR} = 30$$

Respostas: a) Quando  $\theta$  é máximo, temos  $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{5}$

b) Para  $\beta = 60^\circ$  temos:  $\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{7}}{14}$

c)  $\operatorname{OR} = 30$

## M.06

A multiplicação de matrizes permite codificar mensagens. Para tanto, cria-se uma numeração das letras do alfabeto, como na tabela abaixo. (O símbolo \* corresponde a um espaço).

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Como exemplo, suponha que a mensagem a ser transferida seja **FUVEST**, e que as matrizes codificadora e decodificadora sejam  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ , respectivamente. A matriz em que se escreve a mensagem é  $M = \begin{pmatrix} F & U & V \\ E & S & T \end{pmatrix}$ , que, numericamente, corresponde a

$M = \begin{pmatrix} 6 & 21 & 22 \\ 5 & 19 & 20 \end{pmatrix}$ . Para fazer a codificação da mensagem, é feito o produto de matrizes

$$N = A \cdot M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 21 & 22 \\ 5 & 19 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 101 & 106 \\ 11 & 40 & 42 \end{pmatrix}$$

O destinatário, para decifrar a mensagem, deve fazer o produto da matriz decodificadora com a matriz codificada recebida:

$$M = B \cdot N = \begin{pmatrix} 6 & 21 & 22 \\ 5 & 19 & 20 \end{pmatrix}.$$

a) Se a matriz codificadora é  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , e a mensagem

a ser transmitida é **ESCOLA**, qual é a mensagem codificada que o destinatário recebe?

b) Se a matriz codificadora é  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , e o destina-

tário recebe a matriz codificada  $N = \begin{pmatrix} 33 & 9 & 8 & 48 \\ 47 & 13 & 9 & 75 \end{pmatrix}$ ,

qual foi a mensagem enviada?

c) Nem toda matriz  $A$  é uma matriz eficaz para enviar

mensagens. Por exemplo, se  $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -14 \end{pmatrix}$ , encontre

4 seqüências de 4 letras de forma que as respectivas

matrizes codificadas sejam sempre iguais a  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

### Resolução

- a) A palavra ESCOLA, transformada em matriz numérica conforme a tabela acima, resulta em

$$M = \begin{pmatrix} E & S & C \\ O & L & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 19 & 3 \\ 15 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

Essa matriz codificada resulta em

$$N = A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 19 & 3 \\ 15 & 12 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 20 & 31 & 4 \\ 35 & 43 & 5 \end{pmatrix}$$

- b) Para a matriz codificadora  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a matriz decodificadora  $B = A^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ao decodificar a matriz

$$N = \begin{pmatrix} 33 & 9 & 8 & 48 \\ 47 & 13 & 9 & 75 \end{pmatrix} \text{ obtem-se}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 33 & 9 & 8 & 48 \\ 47 & 13 & 9 & 75 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 19 & 5 & 7 & 21 \\ 14 & 4 & 1 & 27 \end{pmatrix}$$

representando a mensagem

$$\begin{pmatrix} S & E & G & U \\ N & D & A & * \end{pmatrix}$$

- c) Seja  $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$  uma matriz que codificada

pela matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -14 \end{pmatrix}$  resulta na matriz

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim,

$$N = A \cdot M = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 2x - 7z & 2y - 7w \\ 4x - 14z & 4y - 14w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - 7z = 0 \\ 4x - 14z = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 2x - 7w = 0 \\ 4y - 14w = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{7z}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{7w}{2}$$

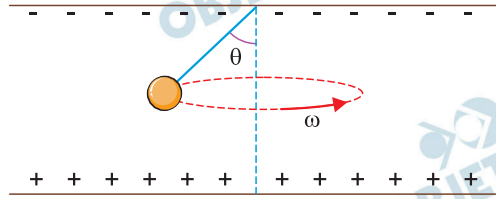
Como  $\{x; y; z; w\} \subset \{1, 2, 3, \dots, 27\}$  podemos ter os seguintes exemplos:

z	w	x	y	Palavra codificada
2	2	7	7	GGBB
4	4	14	14	NNDD
6	6	21	21	UUFF
2	4	7	14	GNBD



# F.01

Duas placas metálicas planas e circulares, de raio  $R$ , separadas por uma distância  $d \ll R$ , estão dispostas na direção horizontal. Entre elas, é aplicada uma diferença de potencial  $V$ , de modo que a placa de cima fica com carga negativa e a de baixo, positiva. No centro da placa superior, está afixado um fio isolante de comprimento  $L < d$  com uma pequena esfera metálica presa em sua extremidade, como mostra a figura. Essa esfera tem massa  $m$  e está carregada com carga negativa  $-q$ . O fio é afastado da posição de equilíbrio de um ângulo  $\theta$ , e a esfera é posta em movimento circular uniforme com o fio mantendo o ângulo  $\theta$  com a vertical.



Determine

- o módulo  $E$  do campo elétrico entre as placas;
- os módulos  $T$  e  $F$ , respectivamente, da tração no fio e da força resultante na esfera;
- a velocidade angular  $\omega$  da esfera.

Note e adote:

A aceleração da gravidade é  $g$ .

Forças dissipativas devem ser ignoradas.

## Resolução

- Como a distância  $d$  entre as placas é tal que  $d \ll R$ , então podemos supor que o campo elétrico entre elas seja uniforme.

$$E \cdot d = V$$

$$E = \frac{V}{d}$$

Visto de perfil, temos as figuras 1 e 2:

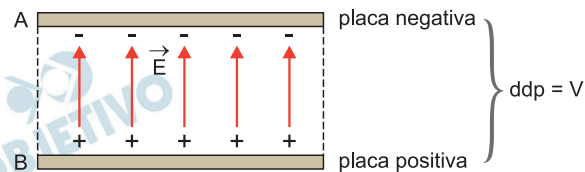


fig. 1

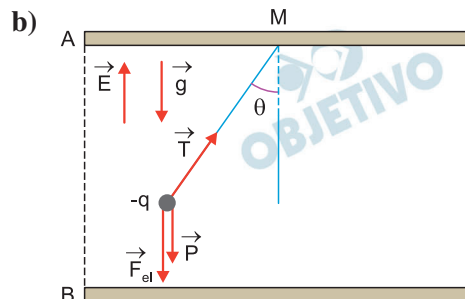


fig. 2 - Forças na esferinha

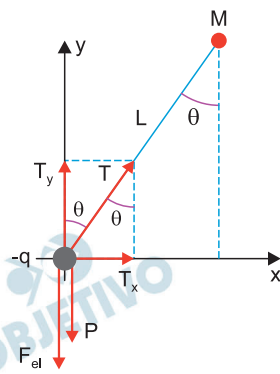


fig. 3

1) Equilíbrio vertical

$$T_y = F_{el} + P$$

$$T \cdot \cos \theta = q \cdot E + m \cdot g$$

$$T \cdot \cos \theta = q \cdot \frac{V}{d} + m \cdot g$$

$$T \cdot \cos \theta = \frac{q \cdot V}{d} + \frac{m \cdot g \cdot d}{d}$$

$$T = \frac{q \cdot V + m \cdot g \cdot d}{d \cdot \cos \theta}$$

2) Força resultante na direção horizontal:

$$F = T_x$$

$$F = T \cdot \sin \theta$$

$$F = \left( \frac{q \cdot V + m \cdot g \cdot d}{d \cdot \cos \theta} \right) \cdot \sin \theta$$

$$F = \frac{(q \cdot V + m \cdot g \cdot d) \cdot \operatorname{tg} \theta}{d}$$

c) A força resultante F faz o papel de força centrípeta:

$$F_{cp} = F$$

$$m \cdot \omega^2 \cdot r = F$$

$$\text{mas: } r = L \cdot \sin \theta \text{ (fig. 3)}$$

$$m \cdot \omega^2 \cdot L \cdot \sin \theta = \left( \frac{q \cdot V + m \cdot g \cdot d}{d} \right) \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\omega^2 = \frac{q \cdot V + m \cdot g \cdot d}{m \cdot L \cdot d \cdot \cos \theta}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{q \cdot V + m \cdot g \cdot d}{m \cdot L \cdot d \cdot \cos \theta}}$$

Respostas: a)  $E = \frac{V}{d}$

b)  $T = \frac{q \cdot V + m \cdot g \cdot d}{d \cdot \cos \theta}$

$$F = \frac{(q \cdot V + m \cdot g \cdot d) \cdot \operatorname{tg} \theta}{d}$$

c)  $\omega = \sqrt{\frac{q \cdot V + m \cdot g \cdot d}{m \cdot L \cdot d \cdot \cos \theta}}$

## F.02

O foguete Saturno V, um dos maiores já construídos, foi lançado há 50 anos para levar os primeiros humanos à Lua. Tinha cerca de 3.000 ton de massa total, 110 m de altura e diâmetro máximo de 10 m. O primeiro estágio, acionado no lançamento, tinha 2.000 ton de combustível. Todo este combustível foi queimado e ejetado em 180s com velocidade  $V_e$  de escape dos gases, aproximadamente igual a 3.000 m/s.

Determine os valores aproximados

- da taxa média  $\alpha$ , em kg/s, com que o combustível foi ejetado;
- do módulo  $F$  da força resultante sobre o foguete no instante imediatamente antes do término da queima do combustível do primeiro estágio, considerando  $\alpha$  constante;
- dos módulos  $a$  da aceleração do foguete e  $v$  da sua velocidade, no instante imediatamente antes do término da queima do combustível do primeiro estágio.

Note e adote:

$$1 \text{ ton} = 10^3 \text{ kg}$$

Considere a aceleração da gravidade  $g$  igual a  $10 \text{ m/s}^2$

A força motora de um foguete, chamada força de empuxo, é dada por  $F_e = \alpha V_e$

A velocidade de um foguete em trajetória vertical é dada por  $v = V_e \ln \left( \frac{m_0}{m} \right) - gt$ , em que  $m_0$  é a massa total no lançamento e  $m$ , a massa restante após um intervalo de tempo  $t$ .

$\ln(x)$  é uma função que assume os seguintes valores, aproximadamente:

$$\ln(1,5) = 0,4; \ln(2) = 0,7; \ln(3) = 1,1$$

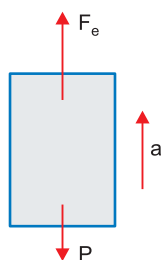
### Resolução

- a) A taxa média  $\alpha$  é dada por:

$$\alpha = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{2000 \cdot 10^3 \text{ kg}}{180 \text{ s}} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{9} \cdot 10^5 \text{ kg/s}$$

- b) Quando termina o combustível, a massa do foguete é  $1000t$ .

Como no 1º estágio a trajetória é vertical, temos:



$$F = F_e - P$$

$$F = \alpha V_e - mg$$

$$F = \frac{1}{9} \cdot 10^5 \cdot 3000 - 1000 \cdot 10^3 \cdot 10 \text{ (N)}$$

$$F = \frac{1}{3} \cdot 10^8 - 0,1 \cdot 10^8 \text{ (N)}$$

$$F \cong 0,33 \cdot 10^8 \text{N} - 0,1 \cdot 10^8 \text{ (N)}$$

$$F \cong 0,23 \cdot 10^8 \text{N}$$

$$F \cong 2,3 \cdot 10^7 \text{N}$$

c) 1) PFD:  $F_R = ma$   
 $2,3 \cdot 10^7 \cong 1,0 \cdot 10^6 a$

$$a \cong 23 \text{m/s}^2$$

2) De acordo com o texto:

$$v = V_e \ln \left( \frac{m_0}{m} \right) - g t$$

$$v \cong 3000 \ln \left( \frac{3000}{1000} \right) - 10 \cdot 180 \text{ (SI)}$$

$$v \cong 3000 \cdot \ln(3) - 1800 \text{ (SI)}$$

$$v \cong 3000 \cdot 1,1 - 1800 \text{ (SI)}$$

$$v \cong 1500 \text{m/s}$$

Respostas: a)  $\alpha = \frac{1}{9} \cdot 10^5 \text{kg/s}$

b)  $F \cong 2,3 \cdot 10^7 \text{N}$

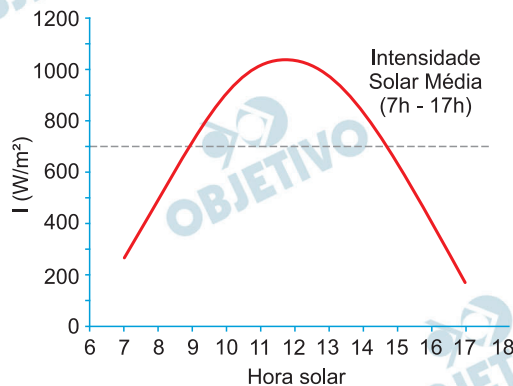
c)  $a \cong 23 \text{m/s}^2$

$v \cong 1500 \text{m/s}$

Observação: O símbolo de tonelada é *t* e não *ton* como aparece no enunciado.

## F.03

Uma fábrica montou uma linha de produção que tem necessidade de um fluxo contínuo de água, de  $8\ell/\text{min}$ , numa temperatura  $15^\circ\text{C}$  acima da temperatura ambiente. Para obter esse resultado, foi utilizado um aquecedor de água híbrido, consistindo de um coletor solar e de um aquecedor elétrico que complementa o aquecimento da água.



Considere a distribuição diária de intensidade de radiação solar  $I$  dada pela figura e determine

- a potência total  $P$ , em  $\text{W}$ , que este sistema de aquecimento necessita ter;
- a área  $A$  do coletor para que, no horário de pico da intensidade de radiação solar, a água seja aquecida  $15^\circ\text{C}$  acima da temperatura ambiente, apenas pelo coletor solar, considerando que a sua eficiência seja  $40\%$ ;
- a quantidade de energia elétrica complementar  $E$ , em  $\text{kWh}$ , usada em um dia, com o sistema operando das  $7\text{h}$  às  $17\text{h}$ , considerando a área calculada no item (b).

Note e adote:

Calor específico da água =  $1\text{ cal/g}^\circ\text{C}$

Densidade da água =  $1\text{ kg}/\ell$

$1\text{ cal} = 4\text{ J}$

### Resolução

- Cálculo da potência total  $P$  para aquecer  $8\ell$  de água ( $d = 1,0\text{kg}/\ell$ ) por minuto ( $\Delta t = 60\text{s}$ ), adotando o calor específico da água  $c = 1,0\text{ cal/g}^\circ\text{C}$  e o equivalente mecânico do calor igual a  $4\text{J}/\text{cal}$ :**

$$\text{Potência da fonte térmica} = \frac{\text{calor sensível (Q)}}{\text{intervalo de tempo } (\Delta t)}$$

$$P = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{mc \Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d \cdot V \cdot c \cdot \Delta\theta}{\Delta t}$$

Considerando-se  $c = 1\text{ cal/g}^\circ\text{C} = 4000\text{J/kg}^\circ\text{C}$

$$P = \frac{1,0 \cdot 8,0 \cdot 4000 \cdot 15}{60} \text{ (W)}$$

$$P = 8000\text{W}$$

$$P = 8,0\text{ kW}$$

- b) Cálculo da área A do coletor solar no horário de pico ( $I \cong 1050\text{W/m}^2$ ) para aquecer a água com potência  $P = 8000\text{W}$ :

$$P = 40\% \text{ de } P_{\text{solar}}$$

$$P = 0,40 \cdot I \cdot A$$

$$A = \frac{P}{0,40 \cdot I}$$

$$A = \frac{8000}{0,40 \cdot 1050} \text{ (m}^2\text{)}$$

$$A \cong 19\text{m}^2$$

- c) Energia do coletor solar ( $E_c$ ) correspondente a 40% da insolação média  $I_m = 700\text{W/m}^2$  entre 7h e 17h ( $\Delta t' = 10\text{h}$ ) sobre a área  $A \cong 19\text{m}^2$ :

$$E_c = \text{Pot}_{\text{média do coletor}} \cdot \Delta t'$$

$$E_c = 0,40 \cdot I_m \cdot A \cdot \Delta t'$$

$$E_c = 0,40 \cdot 700 \cdot 19 \cdot 10 \text{ (Wh)}$$

$$E_c = 53\,200 \text{ Wh}$$

$$E_c = 53,2 \text{ kWh}$$

Energia total do sistema em 10h com potência de 8000W:

$$E_t = P \cdot \Delta t'$$

$$E_t = 8000 \cdot 10 \text{ (Wh)}$$

$$E_t = 80\,000 \text{ Wh}$$

$$E_t = 80 \text{ kWh}$$

A energia complementar E é a diferença entre  $E_t$  e  $E_c$ :

$$E = E_t - E_c$$

$$E = 80 \text{ kWh} - 53,2 \text{ kWh}$$

$$E = 26,8 \text{ kWh}$$

- Respostas: a) 8,0 kW  
b) 19 m<sup>2</sup>  
c) 26,8 kWh

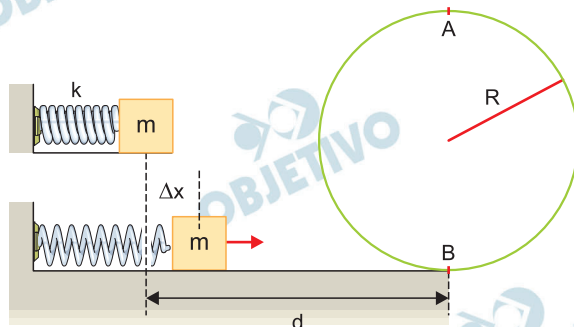
Observação:

Como a leitura do gráfico não pode ser feita com precisão, se adotarmos  $I = 1000 \text{ W/m}^2$ , as respostas serão:

- a) 8,0 kW  
b) 20 m<sup>2</sup>  
c) 24 kWh

## F.04

Um bloco de massa  $m = 400 \text{ g}$  está encostado em uma mola que foi comprimida de  $\Delta x = 0,2 \text{ m}$  em relação a seu comprimento natural. Em um determinado instante, a mola é solta e o bloco adquire velocidade e percorre uma distância  $d = 0,5 \text{ m}$  sobre uma superfície horizontal com coeficiente de atrito  $\mu = 0,3$  e executa um *loop* de raio  $R = 0,9 \text{ m}$ .



Determine

- a energia cinética  $\Delta E$  perdida pelo bloco ao longo do percurso de comprimento  $d$ ;
- as velocidades mínimas  $v_A$  e  $v_B$  que o bloco deve ter, respectivamente, nos pontos A e B, indicados na figura, para conseguir completar o *loop*;
- o menor valor da constante elástica  $k$  da mola para que o bloco complete o *loop*.

Note e adote:

Aceleração da gravidade =  $10 \text{ m/s}^2$

Não há atrito entre o bloco e a pista em *loop*.

Ignore a resistência do ar.

A figura é esquemática e não está em escala.

### Resolução

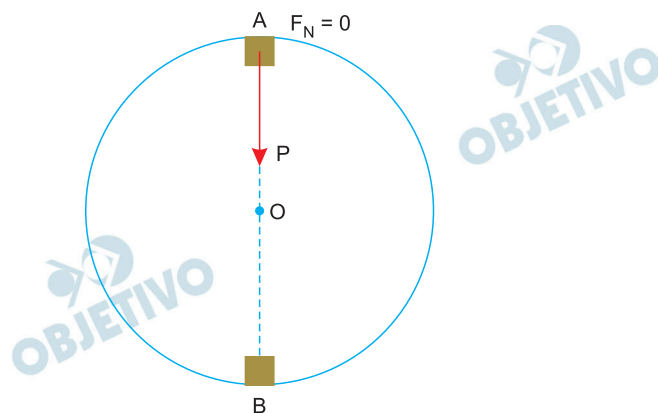
- a) A energia cinética dissipada  $\Delta E$  é dada pelo módulo do trabalho do atrito:

$$\Delta E = |\tau_{\text{at}}| = F_{\text{at}} \cdot d = \mu m g d$$

$$\Delta E = 0,3 \cdot 0,40 \cdot 10 \cdot 0,5 \text{ (J)}$$

$$\Delta E = 0,6 \text{ J}$$

- b) 1) A velocidade escalar mínima em A ocorre quando a força normal com a pista se anula e o peso faz o papel de resultante centrípeta:



$$P = F_{cpA}$$

$$mg = \frac{mv_A^2}{R}$$

$$v_A = \sqrt{gR} = \sqrt{10 \cdot 0,9} \text{ (m/s)}$$

$$v_A = 3,0 \text{ m/s}$$

2) Conservação da energia mecânica entre A e B:

$$E_B = E_A \text{ (referência em B)}$$

$$\frac{mv_B^2}{2} = mg \cdot 2R + \frac{mv_A^2}{2}$$

$$v_B^2 = 4gR + gR = 5gR$$

$$v_B = \sqrt{5gR} = \sqrt{5 \cdot 10 \cdot 0,9} \text{ (m/s)}$$

$$v_B = \sqrt{45} \text{ m/s}$$

$$v_B = 3\sqrt{5} \text{ m/s}$$

c) Conservação da energia entre a posição inicial (mola comprimida) e a posição B:

$$E_i = E_B + \Delta E$$

$$\frac{k(\Delta x)^2}{2} = \frac{mv_B^2}{2} + \Delta E$$

$$\frac{k}{2} \cdot (0,2)^2 = \frac{0,4}{2} \cdot 45 + 0,6$$

$$k \cdot 0,02 = 9,0 + 0,6$$

$$k = 480 \text{ N/m}$$

Respostas: a)  $\Delta E = 0,6 \text{ J}$

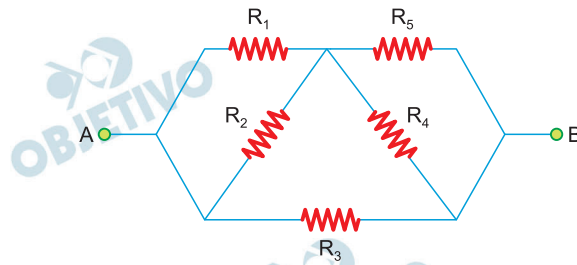
b)  $v_A = 3,0 \text{ m/s}$  e  $v_B = 3\sqrt{5} \text{ m/s}$

c)  $k = 480 \text{ N/m}$



# F.05

Considere o circuito mostrado na figura, onde todos os resistores têm resistência  $R = 200\Omega$ . A diferença de potencial  $V_{AB}$ , entre os pontos A e B, é 120 V.

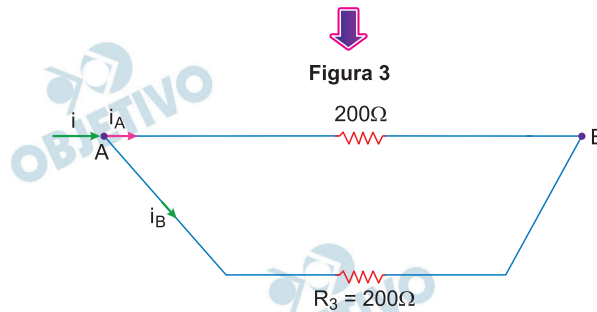
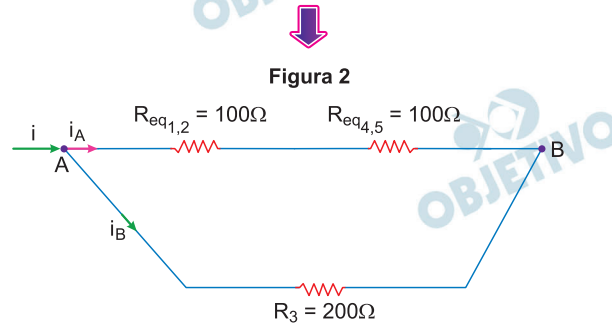
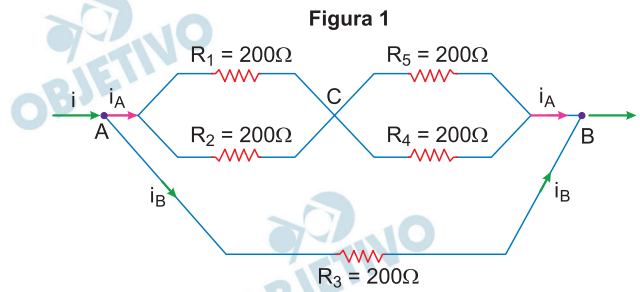


Determine

- a resistência  $R_{eq}$  equivalente deste circuito;
- a corrente total  $i$  no circuito e a corrente  $i_4$  no resistor  $R_4$ ;
- a potência total  $P$  dissipada no circuito e a potência  $P_3$  dissipada no resistor  $R_3$ .

### Resolução

- O circuito fornecido pode ser redesenhado como mostram as figuras abaixo:



$$\text{Finalmente, } R_{eq} = \frac{200}{2} \Omega \Rightarrow R_{eq} = 100\Omega$$

- Da 1.<sup>a</sup> Lei de Ohm, vem:

$$V_{AB} = R_{eq} \cdot i$$

$$120 = 100 \cdot i$$

$$i = 1,2A$$

Da simetria da figura 3, temos:

$$i_A = i_B = \frac{i}{2}$$

$$i_A = i_B = \frac{1,2}{2} (A) \Rightarrow i_A = i_B = 0,60A$$

Como os resistores  $R_4$  e  $R_5$  têm o mesmo valor de resistência elétrica, vem:

$$i_4 = i_5 = \frac{i_A}{2}$$

$$i_4 = i_5 = \frac{0,60}{2} (A) \Rightarrow i_4 = 0,30A$$

c) Cálculo da potência elétrica total dissipada no circuito:

$$P = R_{eq} \cdot i^2$$

$$P = 100 \cdot (1,2)^2 (W)$$

$$P = 144W$$

No resistor  $R_3$ , temos:

$$P_3 = R_3 \cdot i_B^2$$

$$P_3 = 200 \cdot (0,60)^2 (W)$$

$$P_3 = 72W$$

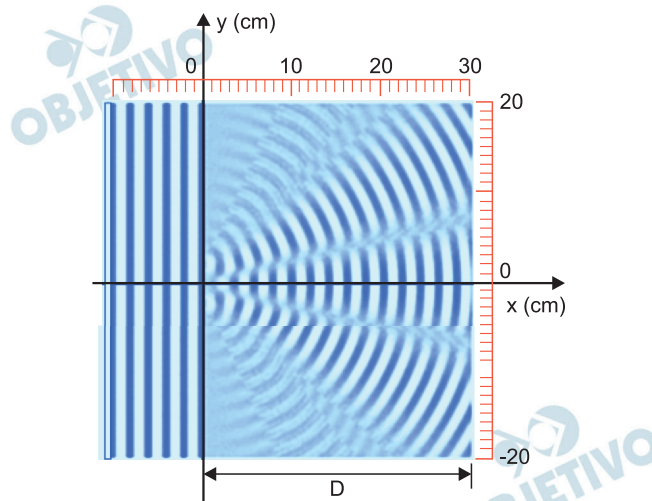
Respostas: a)  $R_{eq} = 100\Omega$

b)  $i = 1,2A$ ;  $i_4 = 0,30A$

c)  $P = 144W$ ;  $P_3 = 72W$

## F.06

Em uma cuba de ondas contendo água, uma haste vibra com frequência 5 Hz, paralelamente à superfície da água e à lateral esquerda da cuba. A haste produz ondas planas que se propagam para a direita, como ilustra a figura.



- a) Determine, a partir da figura, o comprimento de onda  $\lambda$  da onda plana.

Na cuba, em  $x = 0$ , há um anteparo rígido, paralelo às frentes da onda plana, com duas pequenas fendas cujos centros estão em  $y = \pm b/2$ . O lado direito da figura mostra o resultado da interferência das duas ondas que se propagam a partir das fendas.

Determine

- b) a coordenada  $y_1$ , para  $y > 0$ , do primeiro mínimo de interferência na parede do lado direito da cuba. Calcule o valor da distância  $b$ , entre os centros das fendas, considerando que a posição do primeiro mínimo pode ser aproximada por  $y_1 = \frac{D \lambda}{2 b}$ , em que  $D$  é a distância entre as fendas e o lado direito da cuba;
- c) a frequência  $f$  de vibração da haste para que o primeiro mínimo de interferência, na parede do lado direito da cuba, esteja na coordenada  $y = 15$  cm, considerando que a velocidade da onda não depende da frequência.

### Resolução

- a) O comprimento de onda,  $\lambda$ , é a distância entre duas cristas de onda consecutivas. Por leitura direta da figura, depreende-se que:

$$\lambda = 2,0\text{cm}$$

- b) (I) Também por leitura direta da figura, nota-se que o primeiro mínimo de interferência — local onde ocorre a primeira interferência destrutiva a partir do máximo central — situa-se na parede, no ponto de coordenada:

$$y_1 \cong 7,5\text{cm}$$

(II) Observa-se no esquema que  $D = 30\text{cm}$ .

Sendo  $y_1 = \frac{D\lambda}{2b}$ , vem:

$$7,5 = \frac{30 \cdot 2,0}{2b} \Rightarrow b = 4,0\text{cm}$$

c) (I) Com  $y = \frac{D\lambda'}{2b}$ , calcula-se o novo comprimento de onda,  $\lambda'$ :

$$15 = \frac{30 \lambda'}{2 \cdot 4,0} \Rightarrow \lambda' = 4,0\text{cm}$$

(II) Sendo constante a intensidade da velocidade da onda em toda a extensão da cuba de ondas, podemos escrever:

$$V' = V \Rightarrow \lambda' f = \lambda f_0$$

$$4,0 f = 2,0 \cdot 5,0$$

Da qual:  $f = 2,5\text{Hz}$

Respostas: a)  $\lambda = 2,0\text{cm}$

b)  $y_1 \cong 7,5\text{cm}$ ;  $b = 4,0\text{cm}$

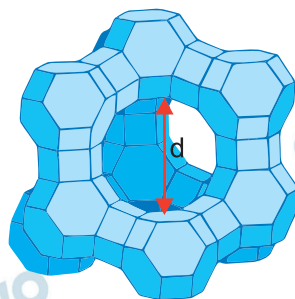
c)  $f = 2,5\text{Hz}$

## Q.01

Muitas atividades importantes para o desenvolvimento tecnológico humano requerem soluções secas, ou seja, sem água. Há muitas formas de eliminar a água de um líquido, mas eliminar praticamente todas as moléculas de água pode ser uma tarefa difícil. Um material poroso, chamado de peneira molecular, é capaz de capturar água muito eficientemente.

Aluminossilicatos são materiais microporosos e, dependendo do diâmetro da abertura e do volume dos poros, podem funcionar como peneiras moleculares para a água. Um aluminossilicato com diâmetro da abertura do poro igual a 0,4 nm está representado na figura 1.

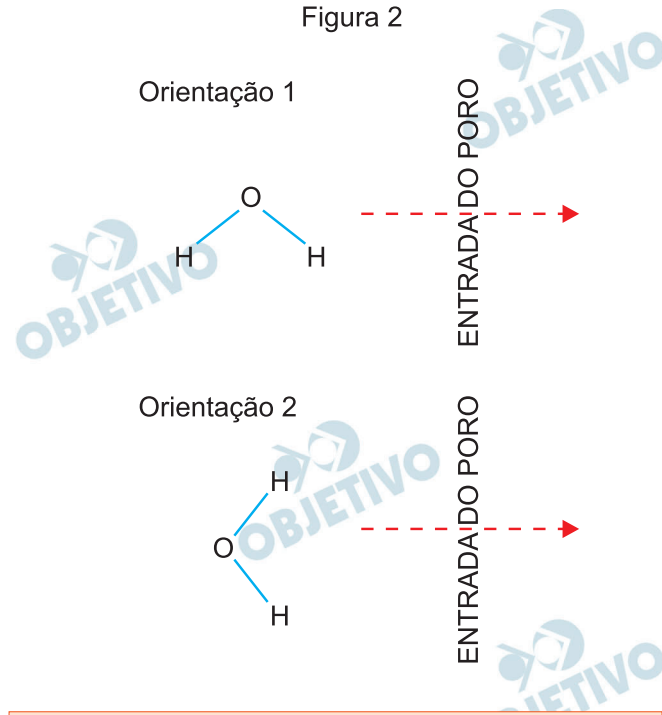
Figura 1



$d$  = diâmetro da abertura do poro.

- Considere uma peneira molecular hidratada de fórmula molecular  $\text{Na}_2\text{O} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2 \cdot \frac{9}{2} \text{H}_2\text{O}$ . Qual a percentagem em massa de água nesse material?
- Considerando que cada mol de peneira molecular tem um volume ao redor de  $120 \text{ cm}^3$  disponível para a captura de moléculas de água, calcule o volume de uma molécula de água e o número de moléculas de água que pode ser retido em 1 mol de peneira molecular.
- Uma molécula de água tem distância entre os átomos de oxigênio e hidrogênio de 96 pm e distância entre os átomos de hidrogênio de 150 pm. Considerando as orientações apresentadas na figura 2, calcule, em cada caso, qual o **menor diâmetro** da abertura do poro (expresso como um número inteiro em pm) que uma peneira molecular deve ter para capturar água. Demonstre os cálculos. Desconsidere os raios atômicos.

Figura 2



Note e adote:

Massas molares (g/mol): Peneira molecular hidratada = 365; H = 1; O = 16.

Densidade (g/mL): Água = 1,00.

Número de Avogadro =  $6,0 \times 10^{23}$ .

1 pm =  $10^{-12}$  m; 1 nm =  $10^{-9}$  m.

### Resolução

- a) Cálculo da massa de  $H_2O$  em 1 mol da peneira:

$$M_{H_2O} = (2 \cdot 1 + 1 \cdot 16) \text{ g/mol} = 18 \text{ g/mol}$$

$$m_{H_2O} = \frac{9}{2} \cdot 18 \quad m_{H_2O} = 81 \text{ g}$$

Cálculo da porcentagem de  $H_2O$ :

365 g de peneira ——— 100%

81 g de  $H_2O$  ——— p

$$p = 22,2\%$$

- b) Volume de  $H_2O$  retida =  $120 \text{ cm}^3$

$$d = \frac{m}{V} \quad 1,00 \text{ g/cm}^3 = \frac{m}{120 \text{ cm}^3} \quad \therefore m = 120 \text{ g}$$

( $H_2O$  retida)

Cálculo de moléculas de  $H_2O$  retidas:

18 g ———  $6,0 \cdot 10^{23}$  moléculas

120 g ——— x

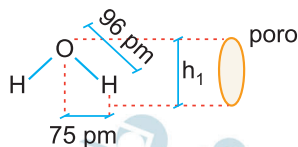
$$x = 4,0 \cdot 10^{24} \text{ moléculas}$$

Cálculo do volume de 1 molécula de  $H_2O$ :

$$18 \text{ g} \text{ ————— } 6,0 \cdot 10^{23} \text{ moléculas} \text{ ————— } 18 \text{ mL}$$
$$1 \text{ molécula} \text{ ————— } V$$

$$V = 3,0 \cdot 10^{-23} \text{ mL} = 3,0 \cdot 10^{-23} \text{ cm}^3$$

c) Caso 1:

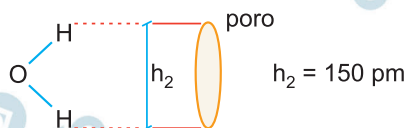


Utilizando teorema de pitágoras:

$$(h_1)^2 + (75)^2 = (96)^2$$

$$h_1 = \sqrt{9216 - 5625} \therefore h_1 = 59,9 \text{ pm}$$

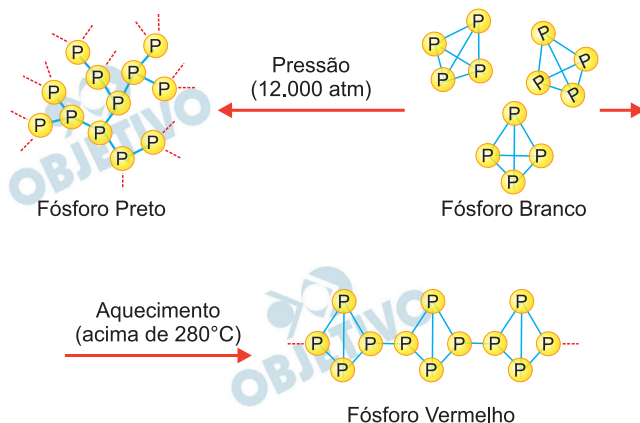
Caso 2:



O menor diâmetro de abertura do poro deveria ter 60 pm para o caso 1 e 150 pm para o caso 2.

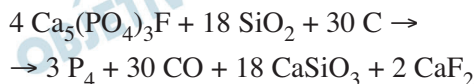
## Q.02

O fósforo elementar pode ser obtido em diferentes formas alotrópicas, nas condições mostradas na figura.



O fósforo branco, de fórmula  $P_4$ , é convertido em fósforo vermelho, conforme a estrutura mostrada na figura. Isso faz com que suas propriedades se alterem. Por exemplo, fósforo branco é solúvel no solvente dissulfeto de carbono, ao passo que o vermelho não é solúvel.

A obtenção industrial do fósforo branco é feita a partir do aquecimento do mineral fluorapatita,  $Ca_5(PO_4)_3F$ , na presença de sílica e carvão, conforme a equação



Com base nessas informações, responda ao que se pede.

- Qual das formas alotrópicas do fósforo mostradas na figura terá maior densidade?
- Estima-se que, anualmente, 744.000 toneladas de fósforo branco são produzidas industrialmente. Calcule a massa total de fluorapatita usada como matéria-prima nesse processo. Considere que esse mineral possui 100% de pureza. Demonstre os cálculos.
- Qual a diferença entre as ligações que mantêm as moléculas de fósforo branco unidas e as que mantêm a estrutura do fósforo vermelho ou do fósforo preto? Explique.

**Note e adote:**

**Massas molares (g/mol):**

**Fluorapatita = 504;  $P_4$  = 124.**

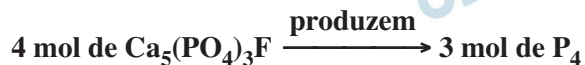
### Resolução

- Entre os alótropos do fósforo, aquele que apresenta maior densidade é o *fósforo preto*.

O fósforo preto é formado sob alta pressão e ocupa o menor volume que são fatores que contribuem para sua alta densidade. Portanto, o aumento de pressão favorece a formação do alótropo de maior densidade.



b) Cálculo da massa de  $\text{Ca}_5(\text{PO}_4)_3\text{F}$ :



↓

$$4 \cdot 504 \text{ g} \text{-----} 3 \cdot 124 \text{ g}$$

$$x \text{ t} \text{-----} 744000 \text{ t}$$

$$x = 4,03 \cdot 10^6 \text{ t de } \text{Ca}_5(\text{PO}_4)_3\text{F}$$

c) O fósforo vermelho e o fósforo preto são constituídos por átomos unidos entre si por ligações covalentes. O fósforo branco é formado por moléculas apolares que interagem entre si por forças intermoleculares do tipo dipolo induzido – dipolo induzido (Forças de van der Waals ou Forças de dispersão de London).

## Q.03

O tricloreto de nitrogênio ( $\text{NCl}_3$ ), ou tricloamina, é um composto de aparência oleosa muito perigoso quando puro, pois se decompõe explosivamente formando  $\text{N}_2$  e  $\text{Cl}_2$ . Ele era utilizado, até sua proibição na década de 1940, para o branqueamento de farinhas comerciais, no chamado Processo Agene<sup>®</sup>. Atualmente, é conhecido como um dos subprodutos tóxicos indesejáveis formados no processo de desinfecção de piscinas. Ele se forma, por exemplo, pela reação do cloro usado nas piscinas com ureia proveniente da urina de nadadores que as utilizam.

Pede-se:

- Represente a molécula do  $\text{NCl}_3$  utilizando fórmula de Lewis.
- Escreva a equação balanceada para a decomposição do  $\text{NCl}_3$  em  $\text{N}_2$  e  $\text{Cl}_2$ .  
Qual é o número de oxidação do nitrogênio no reagente e no produto?
- Calcule a entalpia da reação de decomposição do  $\text{NCl}_3$ , considerando os valores de energia de ligação fornecidos. A reação é endotérmica ou exotérmica? Demonstre seus cálculos e justifique sua resposta.

Note e adote:

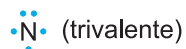
Ligação	Energia de ligação (kJ/mol)
$\text{N} \equiv \text{N}$	940
$\text{Cl} - \text{Cl}$	240
$\text{N} - \text{Cl}$	200

Elétrons na camada de valência:

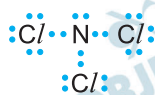
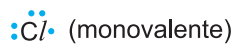
$\text{N}$  (Grupo 15) = 5;  $\text{Cl}$  (Grupo 17) = 7.

### Resolução

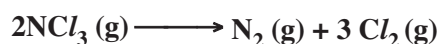
- $\text{N}$ : grupo 15, apresenta cinco elétrons na camada de valência.



$\text{Cl}$ : grupo 17, apresenta sete elétrons na camada de valência.



- Equação de decomposição do  $\text{NCl}_3$ :

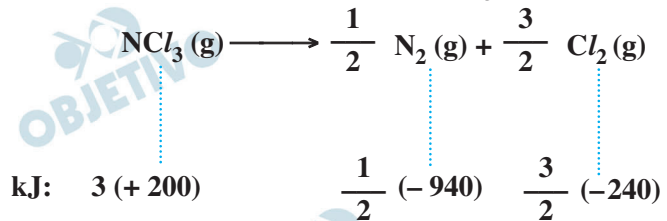


O número de oxidação do cloro no  $\text{NCl}_3$  é  $-1$ , pois

temos o tricloreto de nitrogênio:



c) Equação de decomposição do NCl<sub>3</sub>:



quebradas: (+)                    formadas: (-)

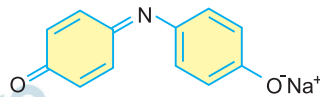
$$\Delta H_r = (+ 600 - 470 - 360) \text{ kJ}$$

$$\Delta H_r = - 230 \text{ kJ/mol de NCl}_3$$

Reação exotérmica ( $\Delta H < 0$ )

## Q.04

Um corante, cuja fórmula estrutural está representada na figura, foi utilizado em um experimento.



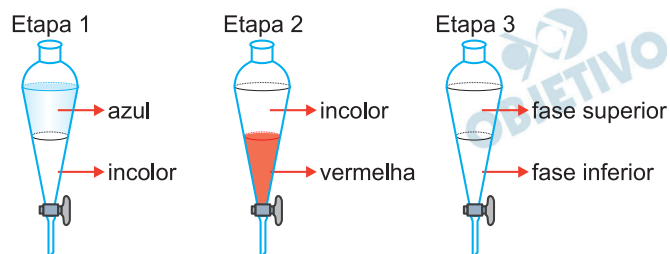
Sabe-se que sua solução aquosa é azul e que, com a adição de um ácido à solução, ela se torna vermelha. O experimento foi realizado em três etapas:

Etapa 1: Colocou-se uma solução aquosa do corante em um funil de separação. Em seguida, um volume igual de diclorometano foi também adicionado a esse funil, agitando-se o conteúdo em seguida. Após algum tempo, observou-se separação em duas fases.

Etapa 2: Recolheu-se a fase superior (solução azul) obtida na etapa 1 em um béquer e adicionou-se a ela uma solução aquosa de ácido sulfúrico, até a solução se tornar vermelha. A seguir, colocou-se essa solução em um funil de separação limpo, ao qual também foi adicionado igual volume de diclorometano. Agitou-se o conteúdo e, após algum tempo, observou-se separação de fases.

Etapa 3: A solução vermelha obtida (fase inferior) foi recolhida em um béquer limpo, ao qual foi adicionada, em seguida, uma solução aquosa de hidróxido de sódio, observando-se nova mudança de cor. O conteúdo do béquer foi transferido para um funil de separação limpo, agitou-se o conteúdo e, após algum tempo, observou-se separação de fases.

O esquema a seguir mostra os resultados obtidos nas três etapas do experimento



Com base nesses resultados, pergunta-se:

- Se a um funil de separação forem adicionados água e diclorometano, qual é a fase da água (superior ou inferior)?
- Escreva a equação química que representa a transformação que ocorreu com o corante na etapa 2. O produto orgânico dessa etapa é mais solúvel em água ou em diclorometano? Explique com base nos resultados experimentais.
- Qual é a cor de cada uma das fases na etapa 3? Explique com base nos resultados experimentais.

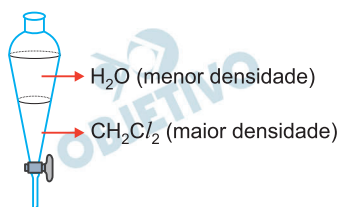
Note e adote:

Densidade (g/mL):

Água = 1,00; diclorometano = 1,33.

### Resolução

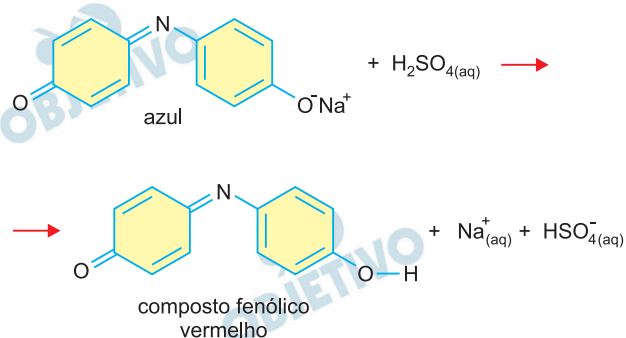
- a) Pelos dados fornecidos, como a densidade do diclorometano ( $\text{CH}_2\text{Cl}_2$ ) ( $d = 1,33 \text{ g/mL}$ ) é maior que a da  $\text{H}_2\text{O}$  ( $d = 1,00 \text{ g/mL}$ ), e pelo fato de serem líquidos imiscíveis, teremos:



A fase da água é a superior.

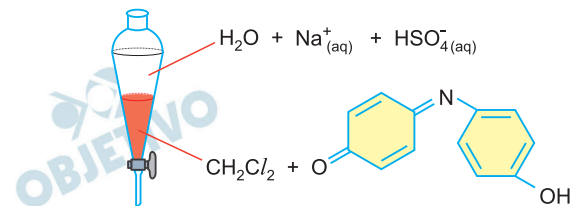
- b) A fase superior (solução aquosa contendo corante) apresenta coloração azul.

A equação da reação do corante com ácido sulfúrico pode ser equacionado por:



Essa solução adquiriu coloração vermelha devido à formação do composto fenólico.

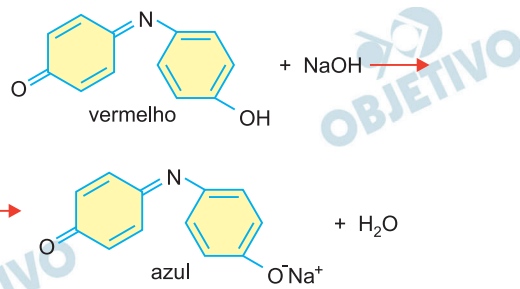
Após colocar essa solução num funil de separação, adicionar diclorometano e agitar, verificou-se a coloração vermelha na solução mais densa, ( $\text{CH}_2\text{Cl}_2$ ), mostrando que o composto fenólico se dissolveu no diclorometano.



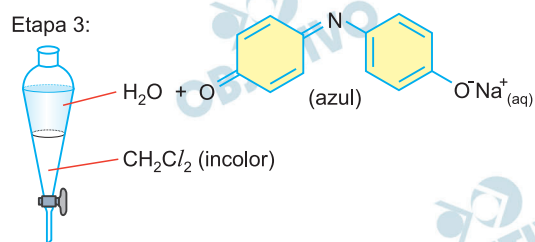
Conclui-se, portanto, que o composto orgânico formado nessa etapa é mais solúvel em diclorometano que na água.

- c) À solução vermelha ( $\text{CH}_2\text{Cl}_2$  + composto fenólico) foi adicionada solução aquosa de  $\text{NaOH}$  e verificou-se mudança de cor.

Irá ocorrer a neutralização do composto fenólico pelo  $\text{NaOH}$ .



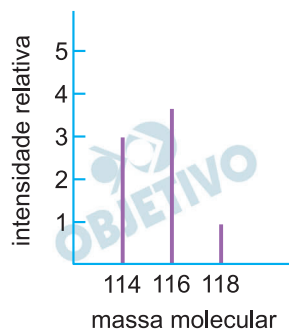
O corante, composto iônico, irá se dissolver na água (coloração azul) e essa etapa 3 terá coloração idêntica à etapa 1.



## Q.05

Na natureza, existem os seguintes isótopos:  $^{79}\text{Br}$  e  $^{81}\text{Br}$ , cada um com a probabilidade de ocorrência de 50%, e  $^{35}\text{Cl}$  e  $^{37}\text{Cl}$ , com probabilidades de 75% e 25%, respectivamente. Um instrumento chamado espectrômetro de massas pode ser utilizado para analisar moléculas constituídas por diferentes combinações desses isótopos. Nessa análise, formam-se os chamados íons moleculares, pela perda de um elétron de cada uma dessas moléculas. O resultado é um gráfico, chamado espectro de massas, onde esses íons moleculares são registrados na forma de linhas, em ordem crescente de massa molecular. A intensidade de cada linha, correspondendo a uma mesma massa, depende da probabilidade de ocorrência de cada combinação isotópica no íon formado. Assim, por exemplo, para o composto  $\text{BrCl}$ , foram obtidos os seguintes resultados:

cátions-radicais	massa molecular	intensidade relativa
$^{79}\text{Br}^{35}\text{Cl}^+$	114	3
$^{79}\text{Br}^{37}\text{Cl}^+$	116	4
$^{81}\text{Br}^{35}\text{Cl}^+$	116	
$^{81}\text{Br}^{37}\text{Cl}^+$	118	1

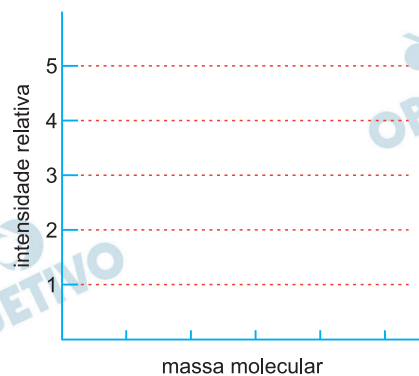


**Note e adote:**

**Considere que, na natureza, tanto a porcentagem de  $^{12}\text{C}$  como a de  $^{19}\text{F}$  é 100%.**

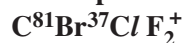
O halon-1211 é um gás cuja fórmula molecular é  $\text{CBrClF}_2$ . Quando esse gás foi analisado em um espectrômetro de massas, formaram-se íons moleculares.

- Mostre a fórmula molecular do íon molecular de maior massa, especificando os isótopos de Br e Cl presentes.
- Mostre as fórmulas moleculares, especificando os isótopos de Br e Cl presentes, para todos os íons de massa molecular 166 formados.
- Baseando-se somente nas informações apresentadas, mostre, no gráfico da folha de respostas, como poderia ser o espectro obtido para a análise do halon-1211.



### Resolução

a) Fórmula molecular do íon halon-1211 de maior massa possível, considerando  $^{81}\text{Br}$  e  $^{37}\text{Cl}$ :

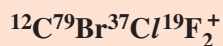


b) Para que o íon possua massa molecular 166, as possibilidades para os isótopos de bromo e cloro são:

1)  $^{79}\text{Br}$  com  $^{37}\text{Cl}$

2)  $^{81}\text{Br}$  com  $^{35}\text{Cl}$

Assim, as fórmulas moleculares possíveis, com as massas especificadas, são:



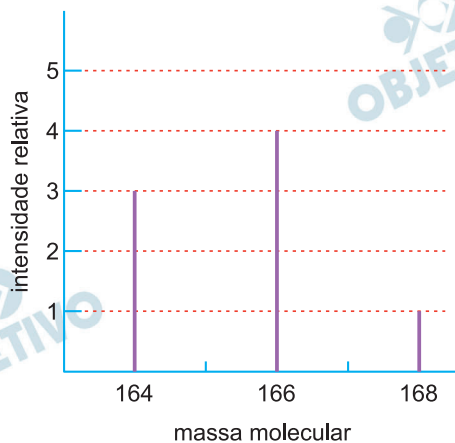
$$\text{M.M.} = 12 + 79 + 37 + 2 \cdot 19 = 166$$

e

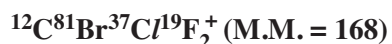
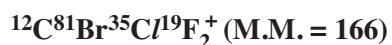
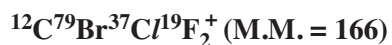


$$\text{M.M.} = 12 + 81 + 35 + 2 \cdot 19 = 166$$

c)



São 4 as possibilidades de íons com as permutas dos isótopos de Br e Cl:





Comparando os 4 íons halon-1211 com os 4 íons de  $\text{BrCl}^+$ , observa-se um aumento de massa de 50 unidades (1 átomo de  $^{12}\text{C}$  + 2 átomos de  $^{19}\text{F}$ ). Portanto, os gráficos serão análogos, diferenciando-se apenas nas massas moleculares.

 OBJETIVO

 OBJETIVO

 OBJETIVO

 OBJETIVO

 OBJETIVO

 OBJETIVO

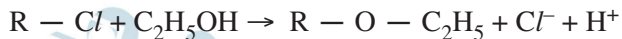
 OBJETIVO

 OBJETIVO

 OBJETIVO

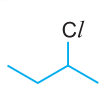

## Q.06

Alguns cloretos de alquila transformam-se em éteres quando dissolvidos em etanol, e a solução é aquecida a determinada temperatura. A equação química que representa essa transformação é:



Um grupo de estudantes realizou um experimento para investigar a reatividade de três cloretos de alquila ao reagir com etanol, conforme descrito a seguir e esquematizado na tabela.

O grupo separou 4 tubos de ensaio e, em cada um, colocou 1 mL de etanol e uma gota do indicador alaranjado de metila. A seguir, adicionou 6 gotas de cloreto de metila ao **tubo 2**, 6 gotas de cloreto de sec-butila ao **tubo 3** e 6 gotas de cloreto de terc-butila ao **tubo 4** (linha I na tabela). Os quatro tubos foram aquecidos por 10 minutos a 60°C, em banho de água e, após esse tempo, foram registradas as observações experimentais relacionadas à cor das soluções (linha II na tabela). Surgiu a dúvida quanto ao resultado obtido para o **tubo 2** e, assim sendo, os estudantes resolveram fazer um novo teste, adicionando, a cada um dos tubos, 2 gotas de uma solução 5% de nitrato de prata em etanol. As observações experimentais feitas a partir desse teste também foram registradas (linha III na tabela).

	<b>Tubo 1</b>	<b>Tubo 2</b>	<b>Tubo 3</b>	<b>Tubo 4</b>
<b>I</b>	EtOH e indicador	EtOH e indicador + $CH_3Cl$	EtOH e indicador + 	EtOH e indicador + 
<b>II</b>	Amarela	Levemente avermelhada	Vermelha	Amarela
<b>III</b>	Inalterado	Ligeira turbidez	Precipitado branco e sobrenadante vermelho	Inalterado

**Note e adote:**

**Alaranjado de metila é um indicador ácido-base.**

**Em pH < 4, apresenta coloração vermelha e, em pH > 5, apresenta coloração amarela.**

- Explique por que a cor do indicador ácido-base muda quando ocorre a reação do cloreto de alquila com o etanol.
- Dê a fórmula estrutural do produto orgânico e a fórmula do precipitado formados no tubo 3.

- c) Com base nos resultados experimentais, indique a ordem de reatividade dos três cloretos de alquila investigados no experimento. Justifique sua resposta com base nos resultados experimentais.

### Resolução

- a) De acordo com a reação química fornecida:

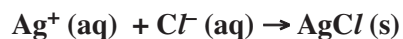


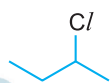
Há formação de íons  $H^+$  e o meio torna-se ácido, mudando a coloração do indicador ácido-base.

- b) A reação química que ocorre no tubo 3:



A fórmula estrutural do produto orgânico é:



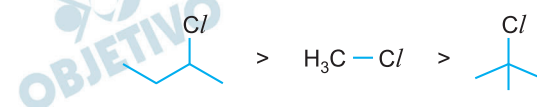
- c) O composto  é o mais reativo, pois segundo a tabela fornecida, ocorreu mudança de cor para vermelha, evidenciando a formação de  $H^+$  e diminuição de pH do meio, e formação de precipitado branco ( $AgCl$ ).

O composto  $H_3C-Cl$  é o segundo mais reativo, pois a solução ficou levemente avermelhada, evidenciando formação de menor quantidade de íons  $H^+$  e apresentou ligeira turbidez (pequena quantidade de  $AgCl$ ).

O composto  é o menos reativo, pois a colo-

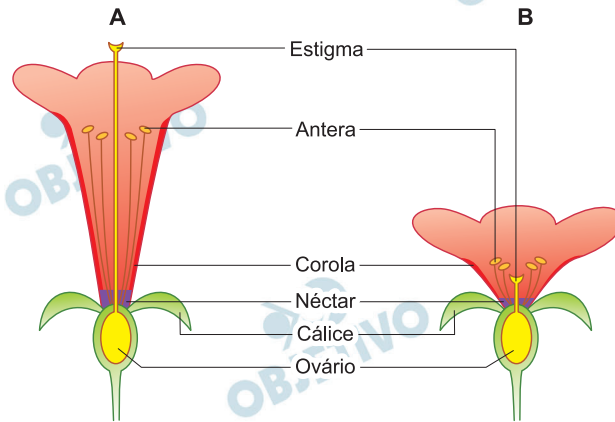
ração do indicador permanece inalterada, evidenciando que não houve mudança de pH e não formou precipitado.

Ordem de reatividade dos cloretos de alquila:



## B.01

Os esquemas mostram cortes longitudinais de flores de duas espécies diferentes (A e B).



Baseado nos elementos listados na figura, responda ao que se pede.

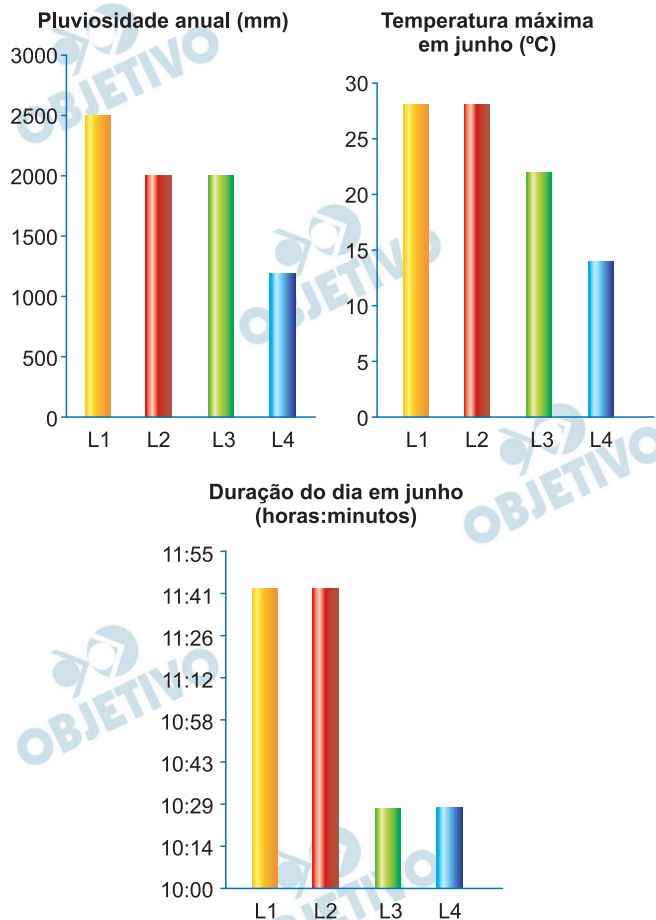
- O que ocorre com o ovário após a fecundação da flor?
- Considerando-se que a autofecundação seja possível nas duas espécies, em qual delas este mecanismo de fecundação é favorecido? Justifique.
- Dada a morfologia da flor da espécie A, cite um animal nectarívoro (que se alimenta de néctar) que poderia polinizá-la. Justifique sua resposta levando em conta uma adaptação desse animal relacionada à capacidade de polinização dessa flor.

### Resolução

- Após a fecundação da flor, o ovário dará origem ao fruto.
- A autofecundação é o processo que ocorre quando a fecundação se dá entre gametas produzidos pelo mesmo organismo. Ocorre naturalmente nas plantas hermafroditas que possuem androceu e gineceu na mesma flor, portanto o pólen da antera deve atingir o estigma do gineceu numa mesma flor. Sendo assim, o esquema B, onde a posição do estame apresenta-se mais alto que o estigma, deve ocorrer auto polinização e conseqüentemente têm-se o mecanismo favorecido.
- Dada a morfologia da flor da espécie A, o animal que se alimenta de néctar que poderia polinizá-la é o beija-flor, levando-se em conta sua anatomia com bico fino, longo e tubular, língua extensível e bifurcada adaptado à flor tubular esquematizada.

## B.02

Os gráficos mostram informações sobre fatores abióticos de quatro locais (L1 a L4), todos eles cobertos por vegetação nativa. A duração do dia é mostrada como o tempo decorrido entre o nascer e o pôr do sol.



- Considerando L1 e L4, em qual deles se espera encontrar maior variedade de adaptações dos animais a climas frios?
- Considerando L2 e L3, em qual deles será maior a produtividade primária bruta em um campo nativo, ao longo de um ano?  
Justifique.
- Se houver florestas pluviais em L3 e L4, em qual delas haveria maior diversidade de seres vivos em geral? Com base em seus conhecimentos, em qual destes locais as cadeias tróficas seriam mais complexas? Justifique.

### Resolução

- A análise dos gráficos deixa claro que L4 possui menor média de temperatura, pluviosidade e duração do dia. Logo, é esperado que nesse local os animais possuam uma maior variedade de adaptações ao clima frio.
- A P.P.B. (Produtividade Primária Bruta) será maior quanto mais elevada for a temperatura e a duração do dia. Logo, da análise do gráfico, em L2 a P.P.B. será maior em relação a L3.
- A biodiversidade é diretamente proporcional à

temperatura e pluviosidade do meio. Como em L3 a média da temperatura e pluviosidade é maior em relação à L4, a biodiversidade será maior no primeiro ambiente. Quanto maior a biodiversidade, maior o número de teias e, conseqüentemente, de cadeias alimentares. Portanto, em L3 as cadeias serão mais complexas em relação à L4.

## B.03

Um trecho da sequência normal de aminoácidos de uma enzima ativa é codificado pelo RNAm... **UGG-AGU-CCA-UCA-CUU-AAU-GCA**... Uma mutação, por perda de uma base, provocou o aparecimento de uma enzima inativa que apresentava, nesse trecho, a sequência de aminoácidos **triptofano – serina – histidina – histidina – leucina – metionina**.

1ª Base do códon ↓	2ª Base do códon				3ª Base do códon ↓
	U	C	A	G	
U	Fenilalanina	Serina	Tirosina	Cisteína	U
	Fenilalanina	Serina	Tirosina	Cisteína	C
	Leucina	Serina	Parada (Stop)	Parada (Stop)	A
	Leucina	Serina	Parada (Stop)	Triptofano	G
C	Leucina	Prolina	Histidina	Arginina	U
	Leucina	Prolina	Histidina	Arginina	C
	Leucina	Prolina	Glutamina	Arginina	A
	Leucina	Prolina	Glutamina	Arginina	G
A	Isoleucina	Treonina	Asparagina	Serina	U
	Isoleucina	Treonina	Asparagina	Serina	C
	Isoleucina	Treonina	Lisina	Arginina	A
	Metionina	Treonina	Lisina	Arginina	G
G	Valina	Alanina	Ác. Aspártico	Glicina	U
	Valina	Alanina	Ác. Aspártico	Glicina	C
	Valina	Alanina	Ác. Glutâmico	Glicina	A
	Valina	Alanina	Ác. Glutâmico	Glicina	G

Usando as informações da tabela de códons,

- justifique a afirmação: “O código genético é degenerado”;
- determine a sequência de aminoácidos desse trecho da enzima ativa e a sequência de bases do RNAm responsável pela enzima inativa;
- escreva o trecho da molécula de DNA que codifica o segmento da enzima ativa e assinale, nessa molécula, o local em que ocorreu a mutação e qual a base perdida.

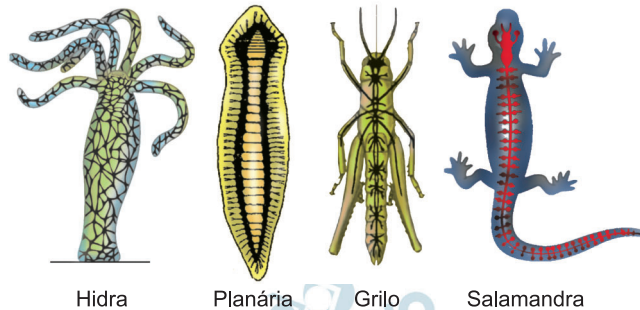
### Resolução

- O código genético é degenerado, porque um aminoácido pode ser especificado por diferentes sequências de nucleotídeos.
- A sequência de aminoácidos do trecho da enzima ativa é: **triptofano – serina – prolina – serina – leucina – asparagina – alanina**. O RNA mensageiro traduzido como a enzima inativa apresenta a sequência: **UGG AGU CAU CAC UUA AUG**.
- O segmento do DNA que codifica a enzima ativa é **ACC TCA GGT AGT GAA TTA CGT**. A mutação por perda de base ocorreu na sétima base (3º códon), ocorrendo a deleção da primeiro nucleotídeo (citosina).



## B.04

A figura abaixo apresenta esquemas dos sistemas nervosos de diferentes animais.



- a) Qual é o padrão de simetria da hidra?
- b) Considere que a hidra passa a maior parte do tempo fixa ao seu substrato em lagoas rasas e margens de rios mansos.  
Descreva como um estímulo ambiental captado em um ponto do corpo é transmitido para todo o corpo da hidra.
- c) Em qual região do eixo corporal do grilo, da planária e da salamandra há a maior concentração de órgãos dos sentidos?  
Qual é a relação dessa concentração com o fato de locomoveremse ativamente no ambiente?

### Resolução

- a) A hidra é um animal do filo dos celenterados ou cnidários. Estes animais possuem simetria radial.
- b) As células sensoriais captam os estímulos, cujos impulsos nervosos resultantes, são conduzidos para todo o corpo do animal, através dos neurônios de sistema nervoso difuso, ou seja, em rede.
- c) Há maior concentração de estruturas sensoriais na região cefálica desses animais, facilitando uma melhor exploração do meio ambiente, devido à captação e a integração desses estímulos, permitindo uma locomoção ativa nos locais mais favoráveis.



## B.05

Há buracos do fundo do mar, conhecidos como *pockmarks*, que são formados pela expulsão de gás, principalmente o metano ( $\text{CH}_4$ ). A maior parte desse metano é utilizada por bactérias e outros organismos no próprio oceano, antes de chegar à atmosfera. O metano dissolvido é oxidado pela ação de microrganismos da coluna d'água, formando  $\text{CO}_2$ , e isso constitui uma fração do  $\text{CO}_2$  que chega à atmosfera. Os *pockmarks* possuem comunidades de microrganismos, moluscos e outros invertebrados que têm mais espécies e biomassa que as das regiões vizinhas. O metano que finalmente chega à atmosfera dura bem menos que o  $\text{CO}_2$ , mas sua capacidade de reter calor é mais de 20 vezes maior.

Carlos Fioravanti, **Fontes de metano**, Revista Pesquisa FAPESP, Edição 271, setembro/2018. Adaptado.

Com base no texto, responda ao que se pede.

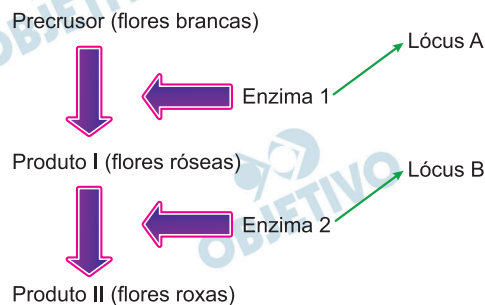
- Além do metano oxidado, cite alguma outra fonte de  $\text{CO}_2$  nos oceanos.
- Sabendo-se que o gás metano é produzido também na decomposição da matéria orgânica, cite duas outras fontes, não marinhas, relacionadas a processos biológicos em que há grande produção de metano.
- Qual é o processo biológico envolvido na origem da energia que sustenta a alta diversidade das comunidades em regiões de *pockmarks*? Qual é o nível trófico dos seres vivos que o realizam?

### Resolução

- Além do metano oxidado nos oceanos, outra fonte de  $\text{CO}_2$  é a respiração dos seres vivos e a decomposição da matéria orgânica.**
- São processos biológicos em que há produção de metano: a decomposição nos pântanos, a ação de bactérias metanogênicas do sistema digestório dos ruminantes (pecuária), a rizicultura e tratamento de resíduos (biodigestão).**
- O processo biológico envolvido é a quimiossíntese. O nível trófico dos seres vivos que realizam tal processo é o dos produtores.**

## B.06

Em uma variedade de petúnia, as flores podem ser brancas, róseas ou roxas. Suponha que essas cores de flores resultem de pigmentos cuja síntese é determinada por genes com segregação independente que participam de uma mesma via metabólica, conforme esquematizado abaixo:



Apenas a presença de alelos dominantes em cada um dos dois *loci* determina enzimas ativas capazes de mediar as respectivas etapas de produção dos pigmentos.

- Quais são os possíveis genótipos de uma planta que apresenta flores róseas?
- Quais são as proporções genotípica e fenotípica esperadas entre os descendentes do cruzamento de plantas com genótipos  $AaBb \times aabb$ ?
- Qual é a proporção fenotípica esperada no cruzamento de indivíduos heterozigóticos para os dois *loci*?

### Resolução

fenótipos – genótipos

branca –  $aabb, aaB_$

rósea –  $A\_bb$

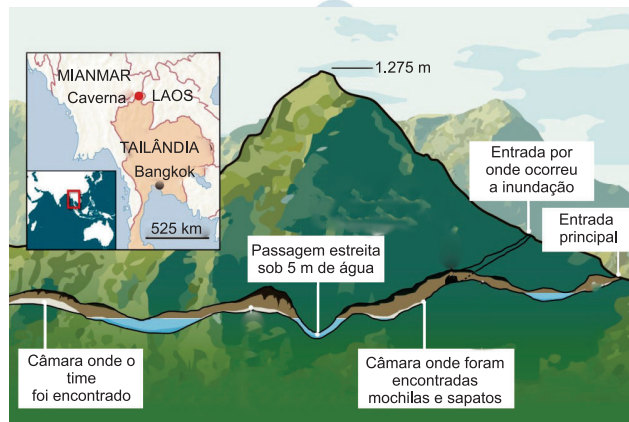
roxa –  $A\_B_$

- As flores róseas apresentam genótipos  $AAbb$  ou  $Aabb$ .
- Pais:  $AaBb \times aabb$   
Filhos: 25%  $AaBb$  (roxa); 25%  $Aabb$  (rósea); 25%  $aaBb$  (branca) e 25%  $aabb$  (branca).  
proporção genotípica: 1 : 1 : 1 : 1  
proporção fenotípica: 1 roxa : 1 rósea : 2 brancas.
- Pais:  $AaBb \times AaBb$   
proporção fenotípica: 9/16  $A\_B_$  (roxas) : 3/16  $A\_bb$  (róseas) : 4/16 ( $aaB_$  e  $aabb$ ) (brancas)

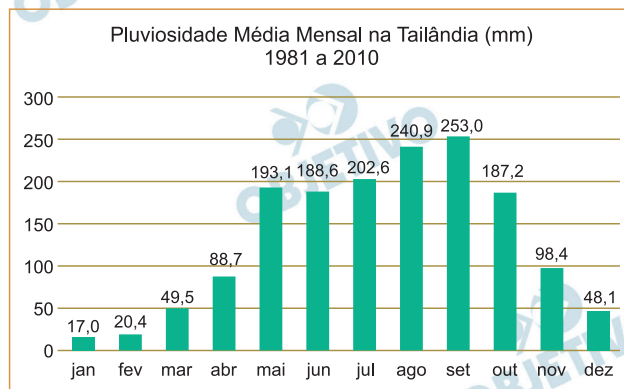
## G.01

Em junho de 2018, 12 crianças de um time de futebol e seu treinador ficaram presos na caverna de Tham Luang, no extremo norte da Tailândia. Por mais de duas semanas, a operação de resgate contou com equipes e assistência técnica de vários países, sensibilizando a população mundial.

No esquema a seguir, pode-se observar a localização e o perfil da caverna e, no gráfico, a pluviosidade média mensal na Tailândia.



<https://webinfo.kz>. Adaptado.



<https://www.tmd.go.th>. Adaptado.

Com base nos dados fornecidos e em seus conhecimentos, responda:

- Qual a rocha mais comum na formação de cavernas?
- Indique e explique um processo que ocorre para a formação de cavernas.
- O clima da Tailândia é controlado pelas monções. Explique a relação entre esse tipo de clima e a dinâmica hídrica relacionada ao evento citado.

### Resolução

- As rochas mais comuns na formação de cavernas são as calcárias, rochas sedimentares formadas basicamente por carbonato de cálcio.
- A formação de cavernas está associada aos processos erosivos causados pela ação do fluxo hídrico subterrâneo e pela dissolução do carbonato de cálcio. Tais rochas são friáveis e apresentam

menor resistência mecânica ao grande volume de água em circulação no sistema.

- c) A Tailândia é um país do Sudeste da Ásia onde prevalece o chamado clima tropical de monções, caracterizado por verões quentes e úmidos e invernos secos. O evento ocorrido coincidiu com o período chuvoso, em que os elevados totais de precipitação pluviométrica da região podem provocar inundações com o extravasamento do nível das águas da bacia e o conseqüente isolamento de galerias subterrâneas.

OBJETIVO

OBJETIVO

OBJETIVO

OBJETIVO

OBJETIVO

OBJETIVO

OBJETIVO

OBJETIVO

## G.02

Observe a tabela:

Produto	2006/ 2007	2011/ 2012	2016/ 2017	2021/ 2022*	2026/ 2027*
Arroz	2.967	2.427	1.981	1.517	1.006
Feijão	4.088	3.262	3.180	2.662	2.142
Milho	14.055	15.178	17.592	17.061	17.580
Soja	20.687	25.042	33.909	39.180	44.101
Trigo	1.852	1.895	1.916	2.088	2.202

\*projeção

Brasil, MAPA. Projeções do Agronegócio:  
2017/18 a 2027/28. 2018. Adaptado.

- Descreva a situação atual e a tendência futura da área plantada de grãos no Brasil.
- Há uma correlação entre a atual configuração da produção agrícola e a estrutura fundiária brasileira? Justifique sua resposta.
- Considerando os dados da tabela e os vetores de expansão do cultivo de soja no território brasileiro na última década, aponte duas possíveis consequências deste processo, sendo uma ambiental e outra social.

### Resolução

- A tendência depreendida da observação da tabela mostra o crescimento da área de plantio de grãos voltados para o grande mercado (como a soja e o milho), muitas vezes mundial, e a redução das áreas das lavouras voltadas para o abastecimento popular (arroz e feijão).
- Sim, pois a grande lavoura comercial (com cultivos como soja e milho) se caracteriza por uma estrutura fundiária de grande dimensão (latifúndios) confirmando uma característica histórica da agricultura do País.
- Em função da grande expansão territorial que a soja apresenta, ela pode trazer várias consequências ambientais, como a destruição da cobertura vegetal (principalmente nas frentes agrícolas que se instalam no cerrado do Brasil central e nas bordas sul e leste da Mata Amazônica – o chamado “Arco de Desmatamento”), alterações no solo, excessivo consumo de água (dos lençóis subterrâneos e das águas superficiais), prováveis alterações climáticas e o comprometimento da biodiversidade. Quanto aos aspectos sociais, podem-se destacar a concentração de terras e de recursos, decorrente dos extensos latifúndios que caracterizam essas culturas, a redução na oferta de empregos, em função da mecanização dessas lavouras (e conseqüente êxodo rural), enfim, o empobrecimento das populações rurais que não participam do processo produtivo dessas lavouras.

## G.03

Observe as anamorfoses:

Figura I – Armas nucleares (2017)

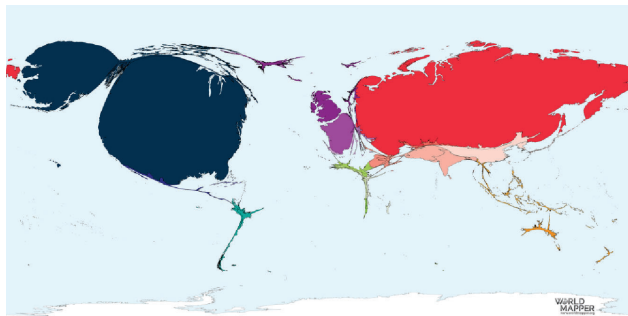
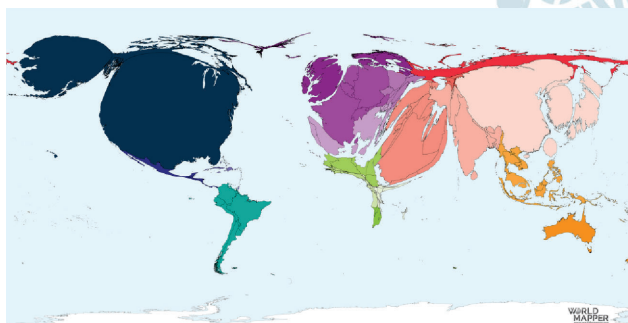


Figura II – Gastos militares (2017)



<https://worldmapper.org/> Acesso: outubro 2018.

- Identifique dois dos países que mais se destacam em relação às armas nucleares.
- Identifique qual é, em cada anamorfose, a condição do Oriente Médio. Explique.
- Nas últimas décadas, houve uma intensificação e expansão de conflitos armados e guerras no mundo. Em que medida as figuras I e II revelam essa situação? Explique.

### Resolução

- Na representação cartográfica da disposição das armas nucleares, os maiores destaques são os Estados Unidos e a Rússia.
- Na anamorfose que ilustra armas nucleares, a participação do Oriente Médio é modesta, visto que a maior parte dos países da região são signatários do TNP – Tratado de Não Proliferação de Armas Nucleares.

Na anamorfose representativa de gastos com armamentos, a participação do Oriente Médio é mais expressiva devido à instabilidade política regional, relacionada com o conflito israelo-palestino, as guerras civis na Síria e no Iêmen, os conflitos internos no Afeganistão e no Iraque, a



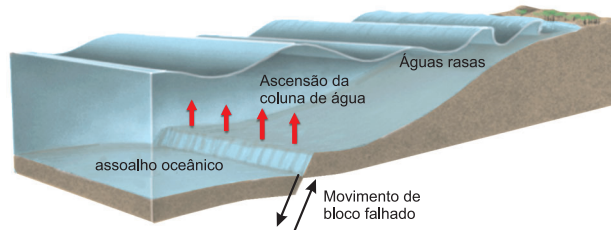
ascensão do autodenominado Estado Islâmico, além da escalada da violência na Turquia, no Irã e em Chipre.

- c) Na anamorfose representativa das armas nucleares, observa-se um restrito número de países em destaque: Estados Unidos, Rússia, Reino Unido e França, mais intensamente envolvidos na Guerra Fria.

Na anamorfose que representa os gastos com armamentos, a Rússia, detentora do espólio militar (e nuclear) da ex-União Soviética, tem uma participação menos expressiva, mas outros países e regiões destacam-se, como o Oriente Médio, a Ásia Meridional, a China, a Coreia do Norte e o Japão. Isso é devido à natureza dos conflitos pós-Guerra Fria, de conotação nacionalista, étnica e religiosa, ou que envolvem interesses estratégicos regionais.

## G.04

*Tsunamis* são ondas de grandes dimensões e destrutivas que têm sua origem sob os oceanos, podendo atingir as linhas de costa e causar grandes danos. Dentre os eventos de *tsunami* mais recentes, pode-se citar o ocorrido na Indonésia em setembro de 2004, com mais de 1.600 vítimas.



Press et al. *Para Entender a Terra*, 2004. Adaptado.

- A maior frequência de ondas ocorre no oceano mais profundo ou nas águas mais rasas?
- Observando a figura, qual é o processo gerador dos *tsunamis*? Explique.
- Cite e explique um evento natural ou de origem antrópica que teve suas consequências causadas ou agravadas pela ocorrência de um *tsunami*.

### Resolução

- A maior frequência de ondas ocorre nas águas rasas.
- Essa onda gigante, o *tsunami*, se origina em áreas onde o movimento dos blocos falhados no assoalho oceânico, causado por movimentação tectônica que provoca a ascensão da coluna de água, ocasionando a onda que, nas proximidades de sua origem, apresenta pequena amplitude, mas se desloca em alta velocidade e, ao se aproximar da costa, aumenta de amplitude, tornando-se uma onda gigante.
- Quanto a eventos naturais, pode-se destacar que a transgressão marinha causada pelo *tsunami* pode intensificar a erosão na orla litorânea, alterando suas formas, pode também, por outro lado, depositar material sedimentar e também alterar as redes fluviais e as desembocaduras de rios. Do ponto de vista antrópico, temos as inúmeras perdas humanas causadas pelo volume de água que a onda traz, destruição de construções, intervindo nas atividades econômicas, mudanças em práticas agrícolas e de pesca que se fazem nas proximidades da orla.



## G.05

Observe as figuras referentes à imagem noturna do Brasil:

Figura I

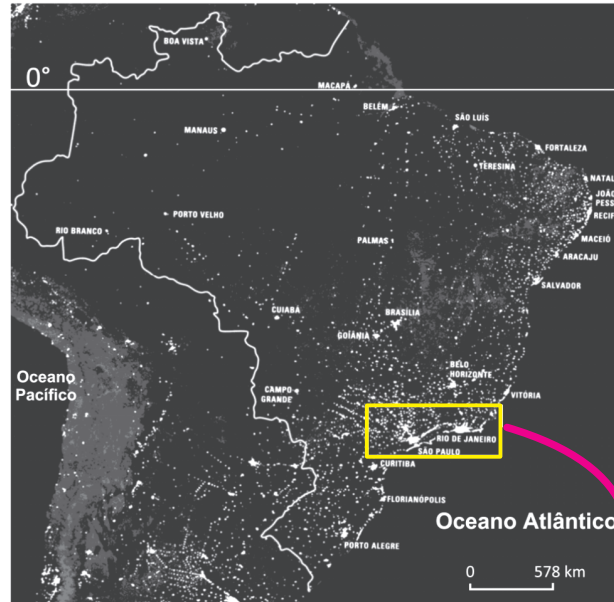


Figura II



Simielli, M.E. *Geoatlas*. 2016. Adaptado.

- A que se referem os pontos e manchas luminosos nas figuras I e II?
- Qual é o conceito que define os aglomerados da figura II? Explique.
- O mapa da figura I revela a desigualdade da rede representada. Explique um processo que tenha induzido a essa desigualdade.

### Resolução

- Trata-se das principais áreas urbanizadas vistas durante a noite.
- A figura II mostra a intensa urbanização entre as cidades do Rio de Janeiro e de São Paulo, ou seja, a formação da megalópole Rio-São Paulo.
- O processo que induziu a desigualdade da rede urbana apresentada na Figura I está atrelado ao histórico de desenvolvimento econômico do País, que privilegiou os investimentos nas cidades localizadas no centro-Sul e na faixa litorânea. Assim, houve maior integração urbana com grau complexo de rede que não fora experimentada pelo interior, cuja rede urbana é simples, com baixa taxa de crescimento urbano. Observa-se que na Amazônia, devido ao domínio de floresta e de atividades primárias, existe fraca urbanização.

## G.06

A tabela na folha de respostas demonstra que fatores tectônicos e geológicos que influenciam nos processos de formação do relevo mudam conforme diferentes escalas de tempo e espaço. Algumas feições podem ser caracterizadas como de baixa frequência e alta magnitude, com ação irregular ao longo do tempo, movendo grandes quantidades de massa e resultando em formas geográficas de grande escala. Outras feições são de alta frequência e baixa magnitude, com ação mais regular, movendo pequenas quantidades de massa e resultando em rugosidades de pequena escala.

Considerando a correlação entre magnitude relativa do evento e escala de tempo, utilize a tabela da folha de respostas para

responder aos itens “a” e “b”; e com base na mesma correlação, responda ao item “c”.

- Indique com as letras “EV” a célula que corresponde, na tabela, a uma erupção vulcânica.
- Indique com as letras “OA” a célula que corresponde, na tabela, à formação de ondulações na areia da praia e indique com as letras “SM” a célula que corresponde ao surgimento de montanhas.
- Por que a formação de voçorocas poderia ocorrer desde a magnitude de microevento até a de megaevento? Explique.

### Resolução

a) e b)

#### Ocorrência de eventos geológicos ao longo do tempo

Magnitude relativa do evento	Escala de tempo				
	1 dia	10 anos	10 <sup>3</sup> anos	10 <sup>6</sup> anos	10 <sup>8</sup> anos
Megaevento					SM
Mesoevento			EV		
Microevento	OA				

Schumm, S.A. *To Interpret the Earth: Ten Ways to Be Wrong*. 1991. Adaptado.

- c) A classificação de um fenômeno geomorfológico depende da adoção de escalas espaciais e temporais de análise que abrajam diferentes dimensões de seu processo de formação.

O fenômeno voçoroca, em estágio inicial de sua ocorrência, pode ser considerado um microevento, pois se manifesta em escala espacial restrita e se desenvolve em curto espaço de tempo. Este fenômeno pode transformar-se em um megaevento na medida em que se dissemina por área mais vasta, expandindo-se ao longo de anos, comprometendo considerável extensão de áreas tropicais.

## H.01

O período do governo Juscelino Kubitschek (1956-1960) é uma referência positiva no imaginário político brasileiro. Não por acaso ele é denominado de “Anos Dourados”. As transformações implementadas nesse período suscitaram desafios e impasses.

A partir destas considerações,

- a) caracterize a política econômica adotada no referido período;
- b) explique qual foi o papel do Estado e cite uma diretriz implementada por aquele governo;
- c) indique de que maneira as transformações implementadas por esse governo repercutiram nas migrações populacionais internas.

### Resolução

- a) **Trata-se da política desenvolvimentista, direcionada para a aceleração do crescimento econômico – sobretudo industrial, com o concurso de empreendimentos estrangeiros e a supervisão do Estado.**
- b) **No período juscelinista, coube ao Estado supervisionar o crescimento econômico e fornecer a necessária infraestrutura (malha viária, produção energética e extrativismo mineral).**  
**Principais diretrizes implementadas: aumento da produção hidroelétrica (usinas de Furnas e Três Marias), construção da Rodovia Belém-Brasília e expansão da indústria automobilística.**
- c) **A política desenvolvimentista de JK, apesar de seu esforço para reduzir as diferenças regionais (criação da Sudene e da Sudam), promoveu um fluxo migratório interno que, além de transferir contingentes de trabalhadores rurais para os centros urbanos, deslocou grande número de migrantes nordestinos para os polos de desenvolvimento do Sudeste e do Centro-Oeste (Brasília).**

## H.02

Leia o seguinte texto:

*Ocorre aqui ao pensamento o que não é lícito sair à língua, e não falta quem discorra tacitamente, que a causa desta diferença tão notável foi a mudança da monarquia. Não havia de ser assim (dizem) se vivera um D. Manuel, um D. João, o terceiro, ou a fatalidade de um Sebastião não sepultara com ele os reis portugueses.*

(...)

*Não hei de pregar hoje ao povo, não hei de falar com os homens, mais alto hão de sair as minhas palavras ou as minhas vozes: a vosso peito divino se há de dirigir todo o sermão. (...) quero eu, Senhor, converter-vos a vós.*

(...)

*Mas pois vós, Senhor, o quereis e ordenais assim, fazei o que fordes servido. Entregai aos holandeses o Brasil, entregai-lhes as Índias, entregai-lhes as Espanhas (que não são menos perigosas as consequências do Brasil perdido); entregai-lhes quanto temos e possuímos (como já lhes entregastes tanta parte); ponde em suas mãos o Mundo; e a nós, aos portugueses e espanhóis, deixai-nos, repudiái-nos, desfazei-nos, acabai-nos. Mas só digo e lembro a Vossa Majestade, Senhor, que estes mesmos que agora desfavoreceis e lançais de vós, pode ser que os queirais algum dia, e que os não tenhais.*

Padre Antônio Vieira, Sermão pelo bom sucesso das armas de Portugal contra as de Holanda. *Sermões*, Porto: Lello & Irmão, 1959.p. 300301

O padre Antônio Vieira foi considerado um dos mais ilustres lusobrasileiros do século XVII. Acerca desse sermão, escrito em 1640, ao final da chamada União Ibérica, responda ao que se pede.

- Caracterize-o do ponto de vista de seu estilo literário.
- Identifique o contexto da História de Portugal no qual o sermão foi composto.
- Explique a situação da América portuguesa, tal como mencionada no texto.

### Resolução

- O estilo literário de Vieira é o Barroco, que predominou no século XVII e se caracterizou pelo uso de hipérbolos e metáforas, além de períodos longos e bem elaborados, que conferem dramaticidade às ideias nele veiculadas.
- O período em questão é o da Restauração Portuguesa de 1640, que pôs fim à União Ibérica. É também o período em que ocorre o desmoronamento do Império Colonial Português nas Índias, passado para as mãos dos holandeses.

c) Na época em que foi proferido o sermão mencionado, a Companhia das Índias Ocidentais holandesa havia-se apoderado de parte das regiões açucareiras e fornecedoras de escravos até então pertencentes a Portugal (Angola e Nordeste Brasileiro), as quais seriam recuperadas a partir de 1644.

OBJETIVO

OBJETIVO

OBJETIVO

OBJETIVO

OBJETIVO

OBJETIVO

OBJETIVO

OBJETIVO

OBJETIVO



## H.03

Observe atentamente as imagens e depois responda às questões.

Foto 1



Manifestação contra a repressão de Tlatelolco, México, 1968.

Foto 2



Primavera de Praga. Praga, Tchecoslováquia, 1968.

- Explique o protesto relacionado ao chamado massacre de Tlatelolco, ocorrido no México, em 1968 (foto 1).
- Explique o protesto relacionado à chamada Primavera de Praga, ocorrida na Tchecoslováquia, em 1968 (foto 2).
- Relacione esses dois protestos ao contexto mundial desse período.

### Resolução

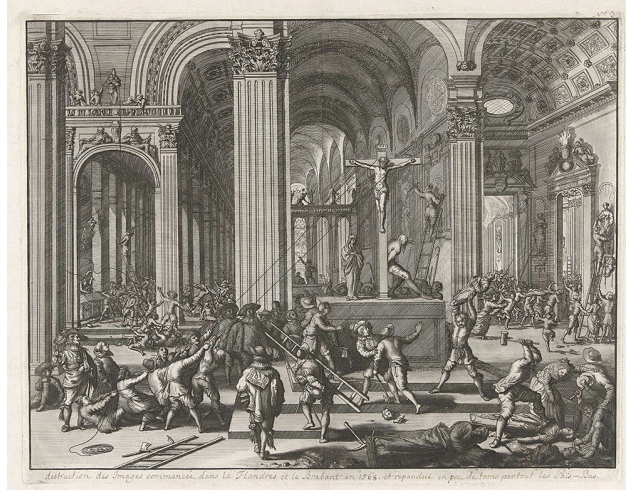
- Em 1968, as manifestações dos estudantes universitários mexicanos, reivindicando melhores condições de ensino e protestando contra as grandes despesas com a Olimpíada daquele ano, foram reprimidas no chamado “Massacre de Tlatelolco” – episódio que suscitou a manifestação tratada na questão.
- Deu-se o nome de “Primavera de Praga” à efêmera tentativa do governo checoslovaco no sentido de promover uma liberalização interna, preservando porém os laços com a URSS. Esse esforço foi sufocado pela intervenção das tropas do Pacto de Varsóvia, tendo à frente o exército soviético, que

esmagou a rebelião, ao preço de uma vida: um estudante se autoimolou em protesto contra a invasão.

- c) Tanto o Massacre de Tlatelolco como a Primavera de Praga estão inseridos no amplo contexto de rebeldia da juventude ocidental no ano de 1968, cujas origens se encontram nas manifestações dos universitários parisienses em maio daquele ano. A ação dos jovens direcionou-se sobretudo contra o *establishment* capitalista burguês e à defesa da liberdade individual, vindo a desembocar em várias linhas de ação na década de 1970.

## H.04

Observe a gravura.



Beeldenstorm (1566). Jan Luyken, 1677-1679, Rijksmuseum, Amsterdã (271x349 mm).

A gravura ilustra o interior de uma catedral católica na Antuérpia e representa um importante desdobramento sociocultural da Reforma Protestante. A partir da imagem e de seus conhecimentos,

- identifique o tema da imagem;
- aponte a abrangência social da Reforma;
- cite dois princípios da Reforma que permitem compreender os fatos representados na imagem.

### Resolução

- Trata-se de um episódio de destruição de imagens em um templo católico por protestantes holandeses, no contexto da Reforma e das guerras de religião que se lhes seguiram.
- Considerando as várias vertentes da Reforma (luteranismo, calvinismo e anglicanismo), pode-se afirmar que esse movimento, dependendo da conjuntura local, abrangeu todos os segmentos sociais, desde a alta nobreza alemã até os camponeses alemães, merecendo especial destaque a influência da Reforma Calvinista sobre a burguesia.
- Rejeição ao culto dos santos e a presença de imagens nos templos.



## H.05

As letras das canções abaixo fazem menção ao rei Haile Selassie (1892-1975), que governou a Etiópia entre 1916 e 1930, como regente, e entre 1930 e 1974, como imperador.

### Haile Selassie

(...)  
*Rastafári*  
*Ele nasceu na Etiópia*  
*Descendente do rei Salomão*  
*Buscou verdade e as respostas*  
*Na Babilônia da escravidão*  
*Foi reconhecido pelo povo*  
*Rude boys na população*  
*Foi condecorado o mais novo ras!*  
*Rastafári da libertação*  
*Haile Selassie ê!*  
(...)

Natural Mystic.  
Álbum *Salve Roots*, 2016. Industrial Music

### Selassie é a Capela

*Haile Selassie é a Capela*  
*Poder da Trindade (Trindade, Trindade é Ele)*  
*Concentre-se nessa direção*  
*Sirva o Deus vivo e viva (Deus vivo e vivo)*  
*Leve seus problemas para Selassie*  
*Ele é o único Rei dos Reis (Rei dos Reis, o Rei dos Reis é ele)*  
*Conquistando o Leão de Judá*  
*Triunfalmente, todos nós devemos cantar (todos devem cantar, todos devem cantar)*  
(...)

Bob Marley. Álbum *The complete Bob Marley & The Wailers* (1967/1972) v.1, Jad Records, 1997.  
Tradução livre.

Com base nas canções e em seus conhecimentos, responda ao que se pede.

- Explique a relação entre a descendência do rei Salomão atribuída a Selassie e a construção religiosa do culto à sua personalidade.
- Selassie foi cultuado por afrodescendentes estabelecidos fora do continente africano, em um processo conhecido como “diáspora negra”. Explique esse processo.
- No século XIX, a situação da Etiópia contrastava com a imensa maioria do continente africano. Explique tal situação.

## **Resolução**

- a) Considerando-se que Hailé Selassié se apresentava como o continuador de uma antiga linhagem de monarcas que remontava ao rei Salomão e à rainha de Sabá, foi possível divinizar-lo sob o argumento de que sua ascendência, além de ter origem real, relacionava-se com o próprio povo eleito de Deus (no caso, os judeus).
- b) Diáspora negra foi a expressão adotada para definir a dispersão de africanos escravizados pelas áreas coloniais do continente americano, dentro da maior emigração forçada da História. Atualmente, este conceito está sendo resgatado – com o acréscimo dos africanos recentemente fixados na Europa – em busca de uma identidade negra vinculada a sua cultura ancestral.
- c) A Etiópia e a Libéria foram os únicos países africanos que escaparam à conquista neocolonialista. No caso da primeira, sua não sujeição a alguma potência decorreu da esmagadora derrota que os etíopes impuseram aos italianos que haviam invadido o país em 1896.

## H.06

Observe com atenção as duas imagens, que remetem à propaganda política durante a Era Vargas (1930-1945), e responda ao que se pede.



- Aponte um elemento formal de mobilização comum aos dois cartazes.
- Identifique os dois movimentos políticos representados nas propagandas a que se referem as duas imagens.
- Mencione um traço convergente e outro divergente entre as plataformas destes projetos políticos.

### Resolução

- Apelo direto e impositivo ao espectador em uma situação de crise.
- Revolução Constitucionalista de 1932 e mobilização da Ação Integralista Brasileira.
- Traço convergente: ambos os movimentos se opunham ao governo de Getúlio Vargas. Traço divergente: enquanto a Revolução de 1932 tinha caráter constitucional, o integralismo possuía uma proposta de governo totalitário.